# 物理統計学

5 平衡統計力学、確率過程のどちらか一方を選択せよ.

**平衡統計力学**

スピンからなる系の平衡状態の性質について考える. 各スピン変数は 1 あるいは-1 の値を取るものとする. またボルツマン定数は 1, 体系の温度は $T$ とし, カノニカル分布則が成り立つものとする. 以下の問いに答えよ.

i) 一つのスピンが, 外部磁場 B の中に置かれている. この系のエネルギー $E$ はスピン変数 $s$ を用いて, $E = -sB$ で与えられる. このとき, スピン変数の平均値 $m =< s >$ を $T, B$ の関数として求めよ.

ii) 多くのスピンからなる系の秩序-無秩序相転移の問題を考えよう. いま, 一つのスピン当り, $z$ 個の他のスピンと相互作用しているとし, その各ペアー (例えばスピン $i$ とスピン $j$) の相互作用エネルギー $e_{i,j}$ が, $e_{i,j} = -Js_is_j \ (J > 0)$ と表わせるとする. 分子場近似のもとで,

a) スピン変数の平均値 $m$ に対する self-consistent な方程式を導け.

b) またこの結果に基づき, この系で生起する相転移の相図 $m = m(T)$ を示せ.

**確率過程**

直線上を運動するブラウン粒子の時刻 $t$ におけ位置を $x(t)$ と表わすとき, $x(t)$ は次のランジェバン方程式で記述されるとしよう.

$dx(t)/dt = -kx(t) + F(t)$.

ここで, ノイズ $F(t)$ は平均値ゼロのガウス白色雑音であり, $< F(t) >= 0, \ < F(t)F(t') >= 2T\delta(t - t')$ の性質を満たす. また $k, T$ は正の定数である. 以下の問いに答えよ.

i) $p(x, t)$ を $x(t)$ の分布関数とするとき, $p(x, t)$ の時間変化を支配するフォッカープランク方程式を導け.

ii) 体系の、時間に依存する自由エネルギー $A(t)$ を

$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dxp(x, t)[kx^2/2 + T \ln p(x, t)]$

と定義するとき,$A(t)$ が時間経過とともに非増大な関数, すなわち $dA(t)/dt \leq 0$, であることを示せ. 但し分布関数は遠方で十分早くゼロに漸近するとしてよい.

iii) 任意の初期条件からスタートしたときに, 十分な時間の経過後実現される平衡分布を求めよ.