線形計画

3

次の線形計画問題 P を考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \quad & \text{minimize} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元係数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである．ベクトルはすべて列ベクトルとし，$^\top$ は転置を表す．問題 P は最適解をもつと仮定し，目的関数の最小値を $\min$ (P) と表す．

さらに，問題 P に関連して，m 次元ベクトル $\boldsymbol{w}$ をパラメータとして含む次の線形計画問題 P($\boldsymbol{w}$) を考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\boldsymbol{w}): \quad & \text{minimize} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}^\top (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

この問題の目的関数の最小値を $\min$ (P($\boldsymbol{w}$)) と表す．ただし，問題 P($\boldsymbol{w}$) が有界でないときは $\min$ (P($\boldsymbol{w}$)) $= -\infty$ と定義する．

以下の問 (i)–(iii) に答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$ に対して $\min$ (P) $\geq \min$ (P($\boldsymbol{w}$)) が成り立つことを示せ．

(ii) 問題 P の双対問題の任意の最適解を $\boldsymbol{w}^*$ とする．そのとき，$\min$ (P) $= \min$ (P($\boldsymbol{w}^*$)) が成り立つことを示せ．

(iii) ある $\bar{\boldsymbol{w}} \geq \boldsymbol{0}$ に対して $\min$ (P) $= \min$ (P($\bar{\boldsymbol{w}}$)) が成り立つならば，ベクトル $\bar{\boldsymbol{w}}$ は問題 P の双対問題の最適解であることを示せ．