基礎数学 II

6

実対称行列はそのすべての固有値が正であるとき, 正定値といい, すべての固有値が非負であるとき, 半正定値という. 以下の問いに答えよ.

(i) $n \times n$ 実対称行列 B が半正定値であるための必要十分条件は, すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{x} \cdot B\boldsymbol{x} \geq 0$ の成り立つことである. また, B が正定値となるための必要十分条件は, すべての $\boldsymbol{x} \neq 0$ に対して, $\boldsymbol{x} \cdot B\boldsymbol{x} > 0$ の成り立つことである. これを証明せよ. ただし, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ で $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ の内積を表す.

(ii) $n \times n$ 実行列 A に対し, $S_0 = A^T A$ とおく. S_0 は半正定値対称行列で, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} S_0$ が成り立つことを示せ. ただし, $\operatorname{rank} A$ は行列 A の階数を, また, A^T は A の転置行列をそれぞれ表す.

(iii) 階数 1 の行列を $A = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^T$ で与える. ただし, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ はともにゼロでない列ベクトルで, かつ $\|\boldsymbol{b}\| = 1$ とする. このとき, 対称行列 $S = \operatorname{tr}(A^T A)I - A^T A$ は半正定値であるが, 正定値ではないことを示せ. ただし, $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを, tr は行列のトレースを, I は $n \times n$ 単位行列をそれぞれ表す.

(iv) 一般に, $S = \operatorname{tr}(A^T A)I - A^T A$ が正定値であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A \geq 2$ であることを示せ.