# グラフ理論

2

単純無向グラフを単にグラフと呼び，グラフ $H$ の節点集合，枝集合をそれぞれ $V(H)$, $E(H)$ と書く．以下，$G$ を節点数 $n(\geq 3)$ の完全グラフとし，正の枝重み $w(e) > 0, e \in E(G)$ を考える．２節点 $u, v$ 間の枝 $e = (u, v)$ の重みは $w(u, v)$ とも表す．各枝 $e = (u, v) \in E(G)$ に対して，$w^*(e)(= w^*(u, v))$ を２節点 $u, v$ 間の重み $w$ に関する最短路の長さとする．$G$ の部分グラフ $G'$ に対して，$\sum_{e \in E(G')} w(e)$, $\sum_{e \in E(G')} w^*(e)$ をそれぞれ $w(G')$, $w^*(G')$ と表す．$S$ を $V(G)$ の部分集合で要素数２以上のものとし，$S$ 内の節点をすべて含む $G$ の連結な部分グラフ $G'$ の中で，$w(G')$ を最小にするものを $T_1$，$w^*(G')$ を最小にするものを $T_2$ とする．以下の問いに答えよ．

(i) 次の命題を証明せよ．すべての枝 $e \in E(G)$ に対して $w^*(e) = w(e)$ が成立するための必要十分条件は，任意の３節点 $x, y, z \in V(G)$ に対して $w(x, y) + w(y, z) \geq w(x, z)$ が成立することである．

(ii) $T_2$ は木であり，どの葉節点も $S$ 内の点であることを証明せよ．

(iii) $w(T_1) \geq w^*(T_2)$ が成立することを証明せよ．

(iv) $w^*(T_2) \geq w(T_1)$ が成立することを証明せよ．

(v) $T_1$ の各枝 $e \in E(T_1)$ に対して，$w(e) = w^*(e)$ であることを証明せよ．