物理統計学

5 平衡統計力学, 確率過程のどちらか一方を選択せよ.

平衡統計力学

N 個のスピンからなる体系を考える. 各スピンの状態は 1 あるいは-1 の値をとるスピン変数 $\{S_i\}(i = 1, .., N)$ により記述される. 体系の温度を T とし, ボルツマン (Boltzmann) 定数 k_B を 1 とする. 外部磁場の強さを B, 各スピンはそれに隣接する γ 個のスピンと相互作用し, その強さを ϵ とする. このとき, 体系のエネルギーは次式で与えられる.

$E(S_1, ..., S_N) = -\epsilon \sum_{<i,j>} S_i S_j - B \sum_{i=1}^{N} S_i$.

但し $\sum_{<i,j>}$ は隣接する全てのスピン対についての和を表す. 以下の問いに答えよ.

(i) 相互作用がないとき（$\epsilon = 0$）, 体系の磁化の強さ $M = \sum_i S_i/N$ の期待値 $< M >$ を B と T の関数として求め, 図を用いてその T, B 依存性について簡潔に説明せよ.

(ii)$\epsilon > 0$ のときに、平均場近似を用いて, $< M >$ を B と T の関数として求め, 特に $B = 0$ の場合について, その T 依存性について簡潔に説明せよ.

確率過程

連続な時間変数 $t(t \geq 0)$ に関して非減少で, 非負の整数値をとる 1 次元確率過程 $N(t)$ について考える. $p(n_1, t_1|n_0, t_0)$ は, 時刻 t_0 において状態 n_0 にいた系 (即ち $N(t_0) = n_0$) が, 時刻 t_1 に状態 n_1 にいる遷移確率を表すとする. 以下の問いに答えよ.

(i) 確率過程 $N(t)$ がマルコフ過程のとき, 遷移確率の満たすべき次のチャップマン-コロモゴルフ（CK）方程式を導け.

$$p(n_2, t_2|n_0, t_0) = \sum_{n_1} p(n_2, t_2|n_1, t_1) p(n_1, t_1|n_0, t_0)$$

(ii) 確率過程 $N(t)$ は時刻 t までに, 空間に固定されたある面を通過する粒子の総数を表すとする. 微少時間 dt の間に 1 個の粒子が通過する確率は μ を正の定数として μdt で与えられるとし, 2 個以上が通過する確率は無視してよい. このとき, 遷移確率 $p(n_1, t_1|n_0, t_0)$ を求めよ.

(iii) (ii) で求めた遷移確率 $p(n_1, t_1|n_0, t_0)$ が (i) のチャップマン-コロモゴルフ（CK）方程式を満足することを示せ.