線形計画

$\boxed{3}$

次の線形計画問題 (P) とその双対問題 (D) を考える．

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\text{(D)} & \text{maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{w} \leq c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{array}
$$

ここで，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$ は n 次元定数ベクトルであり，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ と $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)^\top$ はそれぞれ n 次元，m 次元変数ベクトルである．また，$^\top$ はベクトルの転置を表す．$\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ と仮定する．
$\boldsymbol{w}^*$ を双対問題 (D) の実行可能解とし，添字集合 $J^* \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ を $J^* = \{j \mid \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{w}^* = c_j\}$ で定義する．$x_j \, (j \in J^*)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$ を変数とする次の線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P}^*\text{)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{j \in J^*} \boldsymbol{a}_j x_j + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\
& & x_j \geq 0 \quad (j \in J^*) \\
& & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

以下の問 **(i)**–**(iv)** に答えよ．

(i) 問題 (P*) の双対問題を (D*) とする．問題 (D*) を書け．ただし，変数として m 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いよ．

(ii) 問題 (P*) と (D*) はともに最適解をもつ．その理由を説明せよ．

(iii) $x_j^* \, (j \in J^*)$ と $\boldsymbol{y}^* = (0, 0, \ldots, 0)^\top$ は問題 (P*) において実行可能であるとする．各 $j \notin J^*$ に対して $x_j^* = 0$ とおき，$x_j^* \, (j = 1, 2, \ldots, n)$ を成分とする n 次元ベクトルを $\boldsymbol{x}^*$ とする．そのとき，$\boldsymbol{x}^*$ は問題 (P) の最適解であり，$\boldsymbol{w}^*$ は問題 (D) の最適解であることを示せ．

(iv) 問題 (P*) の目的関数の最小値は正であるとし，$\boldsymbol{v}^*$ を問題 (D*) の最適解とする．そのとき，すべての $j \notin J^*$ に対して $\boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{v}^* \leq 0$ が成り立つならば，問題 (P) は実行可能解をもたないことを示せ．