基礎力学

5

質量 m の質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，$\boldsymbol{r}$ の大きさを r とする．原点を力の中心とする中心力 $\boldsymbol{F} = -cr^{\lambda-2}\boldsymbol{r}$（ただし，$c$，$\lambda$ は定数で $c > 0$）だけが質点に働いている．次の各問いに答えよ．

(i) 力 $\boldsymbol{F}$ は保存力であることを示し，適当な点を基準点としたポテンシャルエネルギーを求めよ．

(ii) 力の中心に関する質点の角運動量が保存されることを証明せよ．そのことを用いて質点は力の中心を含むある平面内を運動することを示せ．

(iii) 質点の運動する平面での極座標を用いた運動方程式を書き下せ．

(iv) $\lambda \neq -2$ のとき，円軌道が存在する．角運動量の大きさを L とするとき，円軌道の半径を求めよ．

(v) $\lambda > -2$，角運動量の大きさ L で質点が円軌道を描いているとき，質点を動径方向に微少に移動させると，質点は動径方向に微小振動を始める．その周期を求めよ．また、円軌道の周期とこの微小振動の周期の比を計算せよ．