基礎数学 II

$\boxed{6}$

n を 2 以上のある自然数とし，Vandermonde 行列 V_n，および，Hankel 行列 H_n を

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad H_n = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}$$

により導入する．各 s_k は x_i を用いて $s_k = {x_1}^k + {x_2}^k + \cdots + {x_n}^k$, $(k = 0, 1, \ldots)$ と表されるとする．ここに，$s_0 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ である．また，

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(i) $\det V_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を示せ.

(ii) 相異なる x_i について平面上の n 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) をとる．曲線

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

がこれら n 点をすべて通るとき，係数 $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}$ は，与えられた (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) から一意に定まることを示せ.

(iii) $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ のとき，$\det V_n > 0$ が成り立つことを示せ.

(iv) H_n を V_n で表し，$\det H_n = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2$ を示せ.

(v) Hankel 行列 H_{n+1} を

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{pmatrix}$$

で定めるとき，$\det H_{n+1} = 0$ が成り立つことを示せ.