グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を枝に実数の重みをもつ連結無向グラフとする．ここで，V は節点の有限集合，E は枝の有限集合を表し，枝 $e\in E$ の重みを $w(e)$ で表す．また，有限集合 X の要素数を $|X|$ で表す．次の条件 (A) を，G の全域木 (V,T) が最小全域木であることの必要十分条件として用いてよい．

(A) 任意の補木枝 $a\in E-T$ とその基本閉路 $C_T(a)\subseteq T\cup\{a\}$ 上の任意の枝 b に対し，$w(a)\geq w(b)$ が成り立つ．

(i) G の全域木 (V,T) は常に，$|V|-1$ の枝数を持つことを証明せよ．

(ii) 条件 (A) は次の条件 (B) と等価であることを示せ．

(B) 任意の枝 $b\in T$ とその基本カットセット $S_T(b)\subseteq(E-T)\cup\{b\}$ 上の任意の枝 a に対し，$w(a)\geq w(b)$ が成り立つ．

(iii) G の枝の重みがすべて異なるとき，G の最小全域木は唯一に定まることを示せ．