グラフ理論

2

$G = (V, E)$ を枝に実数の重みをもつ連結無向グラフとする．ここで，V は節点の有限集合，E は枝の有限集合を表し，枝 $e \in E$ の重みを $w(e)$ で表す．また，有限集合 X の要素数を $|X|$ で表す．次の条件 (A) を，G の全域木 (V, T) が最小全域木であることの必要十分条件として用いてよい．

> (A) 任意の補木枝 $a \in E - T$ とその基本閉路 $C_T(a) \subseteq T \cup \{a\}$ 上の任意の枝 b に対し，$w(a) \geq w(b)$ が成り立つ．

(i) G の全域木 (V, T) は常に，$|V| - 1$ の枝数を持つことを証明せよ．

(ii) 条件 (A) は次の条件 (B) と等価であることを示せ．

> (B) 任意の枝 $b \in T$ とその基本カットセット $S_T(b) \subseteq (E - T) \cup \{b\}$ 上の任意の枝 a に対し，$w(a) \geq w(b)$ が成り立つ．

(iii) G の枝の重みがすべて異なるとき，G の最小全域木は唯一に定まることを示せ．