オペレーションズリサーチ

3

以下の問 (i)，(ii) に答えよ．

(i) $f : R^n \to R$ を $f(\mathbf{0}) = 0$ である凸関数とする．以下の (a)，(b) に答えよ．

(a) すべての $t \geq 1$ と $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(t\boldsymbol{x}) \geq tf(\boldsymbol{x})$$

(b) すべての $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \leq M$ となる定数 M が存在するとき，すべての $\boldsymbol{x} \in R^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = 0$ であることを示せ．

(ii) $\boldsymbol{u}$ を n 次元ベクトル，$\boldsymbol{Q}$ を $n \times n$ 正定値対称行列とする．$\boldsymbol{x} \in R^n$ を決定変数とする次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{aligned} \text{(P)}: \quad & \text{minimize} \quad \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{Q} \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

ここで $\top$ は転置記号を表す．次の (A)，(B) に答えよ．

(A) カルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Khun-Tucker 条件) を用いて，問題 (P) の最適解と目的関数の最小値を求めよ．

(B) 上の結果を用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$(\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u})^2 \leq (\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{Q} \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{Q}^{-1} \boldsymbol{u})$$