力学系数学

6

複素数平面 $\mathbf{C}$ から実軸を除いてできる領域を D で表す.

$$D = \mathbf{C} - \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} := \{z = x + iy \in \mathbf{C} |\ y = 0\} \subset \mathbf{C}$$

以下の各問に答えよ.

(i) $a \in D$ と $t \in \mathbf{R}$ とに対して, $\phi_n(t) = \left(1 + \dfrac{t}{n}a\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ とおく. $\phi_n(t)$ のみたす 1 階常微分方程式を求め, それを解くことにより以下を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}a\right)^n = e^{ta}$$

(ii) $N \times N$ 複素行列 A の固有値はすべて上述の D に含まれるものとする. A と $t \in \mathbf{R}$ とに対して, $\Phi_n(t) = \left(I + \dfrac{t}{n}A\right)^n$ とおく. $\Phi_n(t)$ のみたす 1 階常微分方程式を求め, それを解くことにより以下を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}A\right)^n = e^{tA}$$

ただし, I は $N \times N$ 単位行列. また e^{tA} の定義は $e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$ である.