基礎数学 I

$\boxed{1}$

実数 c_n，$n = 0, 1, \ldots,$ に対し，$x = 0$ を中心とするベキ級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

を考える．$0 < R_f < \infty$ なる R_f に対し，$|x| < R_f$ ならばこの級数は絶対収束し，$|x| > R_f$ ならば収束しないとする．同様に，ベキ級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

は，$0 < R_g < \infty$ なる R_g に対し，$|x| < R_g$ ならばこの級数は絶対収束し，$|x| > R_g$ ならば収束しないとする．以下の問いに答えよ．

(i) $|x| < R_g$ なる任意の x においてベキ級数 $g(x)$ が絶対収束することを用いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n < \infty$$

が成り立つことを示せ.

(ii) $0 < R_0 < R_f$ なる任意の正数 R_0 に対して，正数 M_0 を適当に選べば，任意の n について $|c_n|{R_0}^n \leqq M_0$ とできる．このとき，$|x| < R_0$ なる任意の x において

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n||x|^{n-1} < \infty$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$, $(|a| < 1)$ を用いてよい.

(iii) 上で示したことを用いて，ベキ級数 $f(x)$ と $g(x)$ について

$$R_f = R_g$$

が成り立つことを示せ.