# 線形計画

$\boxed{3}$

以下の (i), (ii) に答えよ．ただし，$\boldsymbol{a}^T$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置を表す (行列の転置も同様).

**(i)**　次の線形計画問題を考える．

$$\mathrm{P}: \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{A}$ は $n \times m$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は $m$ 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は $n$ 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は $n$ 次元変数ベクトルである．問題 P の双対問題の任意の最適解を $\boldsymbol{w}^*$ とする．次に，問題 P の等式制約条件の右辺のベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\hat{\boldsymbol{b}}$ で置き換えた線形計画問題を $\hat{\mathrm{P}}$ とし，その双対問題の任意の最適解を $\hat{\boldsymbol{w}}^*$ とする．不等式

$$(\boldsymbol{b} - \hat{\boldsymbol{b}})^T(\boldsymbol{w}^* - \hat{\boldsymbol{w}}^*) \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．なお，いずれの場合も，双対問題は最適解をもつとする．

**(ii)**　パラメータ $\boldsymbol{y}$ を含む次の線形計画問題を考える．

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{y}): \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{A}$ は $n \times m$ 定数行列，$\boldsymbol{0}$ は $m$ 次元ゼロベクトル，$\boldsymbol{B}$ は $n \times l$ 定数行列，$\boldsymbol{c}$ は $n$ 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{y}$ は $l$ 次元パラメータベクトル，$\boldsymbol{x}$ は $n$ 次元変数ベクトルである．この問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の目的関数の最小値をパラメータ $\boldsymbol{y}$ の関数とみなして $f(\boldsymbol{y})$ と書く．ただし，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ が有界でないときは $f(\boldsymbol{y}) = -\infty$ とする．次に，関数 $f(\boldsymbol{y})$ を非負象限上で最大化する問題

$$\mathrm{Q}: \quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & f(\boldsymbol{y}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

を考える．この問題 Q の目的関数の最大値が 0 となるための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{c}$$

を満たす非負実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_l$ が存在することである．このことを示せ．ただし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の列ベクトル，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$ は行列 $\boldsymbol{B}$ の列ベクトルを表す．