基礎力学

$\boxed{5}$

質量 m の質点が $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$ で表される滑らかな回転放物面上を運動する．($a(> 0)$ は定数，x，y，z は３次元デカルト直交座標の各座標）質点は回転放物面から離れないものとする．鉛直上向きを z 軸の正の方向とし，重力加速度の大きさを g とする．時刻 $t = 0$ に質点は $z = z_0(> 0)$，$y = 0$，$x = \sqrt{2az_0}$ の回転放物面上にあり，回転放物面にそって水平方向（y 軸の正の向き）に速さ v_0 で動き始めるとする．

(i) 原点に関する角運動量の z 成分が保存されることを説明し，その保存則を円筒座標 (ρ, φ, z) を用いて，$\dot{\varphi}\left(= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)$ と z で表せ．($x = \rho\cos\varphi$,　$y = \rho\sin\varphi$)

(ii) 力学的全エネルギーが保存されることを説明し，その保存則を $\dot{\varphi}$，$\dot{z}\left(= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$，$z$ で表せ．

(iii) (i) と (ii) の結果を用いて，$z = z_0$ 以外で，質点の速度が水平方向となる z の値を求めよ．