基礎数学 II

6

3 次実正方行列 X と実パラメータ λ とに対して,

$$\det(\lambda I_3 - X) = \lambda^3 - \lambda^2\phi_1(X) + \lambda\phi_2(X) - \phi_3(X)$$

とおいて, 関数 $\phi_j(X)$, $j = 1, 2, 3$ を定める. ただし, $\det$ は正方行列の行列式を表し, I_3 は 3 次単位行列である. 以下の問いに答えよ.

(i) 次の等式を示せ.

$$\phi_1(X) = \mathrm{tr}(X), \quad \phi_2(X) = \sum_{k=1}^{3} \det(X^{(kk)}), \quad \phi_3(X) = \det X$$

ただし, tr は正方行列のトレースを, $X^{(ij)}$ は行列 X から i 行と j 列を取り除いてできる 2 次正方行列をそれぞれ表す.

(ii) 3 次実正方行列 A を列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^3$ を用いて, $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ のように表す. このとき, $X = A^T A$ に対し, $\phi_j(A^T A)$, $j = 1, 2, 3$ をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の内積, 外積, ノルム等を用いて書き表せ. ただし, A^T は A の転置行列を表す. また, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^3$ の内積, 外積をそれぞれ $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ で表し, $\boldsymbol{x}$ のノルムを $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ と記す.

(iii) (ii) の A に対し, 以下の不等式を証明せよ.

$$|\det A| \leqq \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \, \|\boldsymbol{c}\|$$

また, 等号が成り立つのはどのような場合か.