応用数学

$\boxed{1}$

数列 $c = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に周期 $T\,(>0)$ の周期関数を対応させる写像を

$$(\mathcal{F}^*\, c)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} \quad (t \in \mathbb{R})$$
$$\omega = 2\pi/T$$

で定義する. また, f, g を周期 T の周期関数とし, f と g のたたみこみ $f * g$ を

$$f{*}g\,(t) = \int_0^T f(s)\, g(t-s) ds \quad (t \in \mathbb{R})$$

で定義する. 区間 $[-1,1]$ に台をもつ有界な関数 G_1, G_2 をそれぞれ

$$G_1(s) = \begin{cases} 1 & s \in [-1,1] \\ 0 & s \notin [-1,1] \end{cases}, \qquad G_2(s) = \begin{cases} 1-|s| & s \in [-1,1] \\ 0 & s \notin [-1,1] \end{cases}$$

とし, 数列 a_1, a_2 をそれぞれ $a_1 = \{G_1(n/N)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_2 = \{G_2(n/N)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ で定義する. ただし, $N = 1, 2, 3, \cdots$ である. a_1, a_2 に対応する周期関数 $\mathcal{F}^* a_1, \mathcal{F}^* a_2$ の $1/T$ 倍をそれぞれ

$$D_N(t) = \frac{1}{T}\,(\mathcal{F}^*\, a_1)\,(t), \qquad F_N(t) = \frac{1}{T}\,(\mathcal{F}^*\, a_2)\,(t)$$

とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) $\displaystyle\int_0^T F_N(t) dt = 1$ が成り立つことを示せ.

(ii) $D_N(t)$ を求めよ.

(iii) 一般に, 関数 $g_N(t)$ を周期 T の連続な周期関数とし, 以下の条件をみたすものとする.

a) 任意の $N = 1, 2, 3, \cdots$ について $\displaystyle\int_0^T g_N(t) dt = 1$ かつ, ある定数 M が存在して, $\displaystyle\int_0^T |g_N(t)| dt \leqq M$.

b) $0 < \delta < T/2$ なる任意の δ に対して, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_\delta^{T-\delta} |g_N(t)| dt = 0$.

いま $f(t)$ が周期 T の連続な周期関数ならば, $N \to \infty$ のとき $g_N * f(t)$ は $f(t)$ に一様収束することを示せ.

(iv) $\displaystyle F_N(t) = \frac{1}{TN}\left(\frac{\sin(\omega N t/2)}{\sin(\omega t/2)}\right)^2$ が成り立つことを示せ.

(v) 上の結果を利用して, $F_N(t)$ が (iii) にいう条件 a), b) をみたすことを示せ.