応用数学

1

数列 $c = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に周期 $T\ (>0)$ の周期関数を対応させる写像を

$$(F^{*}c)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n t} \quad (t \in R)$$
$$\omega = 2\pi/T$$

で定義する．また，f,g を周期 T の周期関数とし，f と g のたたみこみ $f*g$ を

$$f*g(t) = \int_0^T f(s)\,g(t-s)\,ds \quad (t \in R)$$

で定義する．区間 $[-1,1]$ に台をもつ有界な関数 G_1,G_2 をそれぞれ

$$G_1(s) = \begin{cases} 1 & s \in [-1,1] \\ 0 & s \notin [-1,1] \end{cases}, \qquad G_2(s) = \begin{cases} 1-|s| & s \in [-1,1] \\ 0 & s \notin [-1,1] \end{cases}$$

とし，数列 a_1,a_2 をそれぞれ $a_1 = \{G_1(n/N)\}_{n=-\infty}^{\infty}$，$a_2 = \{G_2(n/N)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ で定義する．ただし，$N = 1,2,3,\cdots$ である．a_1, a_2 に対応する周期関数 $F^{*}a_1$,$F^{*}a_2$ の $1/T$ 倍をそれぞれ

$$D_N(t) = \frac{1}{T}(F^{*}a_1)(t), \qquad F_N(t) = \frac{1}{T}(F^{*}a_2)(t)$$

とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $\int_0^T F_N(t)\,dt = 1$ が成り立つことを示せ．

(ii) $D_N(t)$ を求めよ．

(iii) 一般に，関数 $g_N(t)$ を周期 T の連続な周期関数とし，以下の条件をみたすものとする．

a) 任意の $N = 1,2,3,\cdots$ について $\int_0^T g_N(t)\,dt = 1$ かつ，ある定数 M が存在して，$\int_0^T |g_N(t)|\,dt \leq M$．

b) $0 < \delta < T/2$ なる任意の δ に対して，$\lim_{N\to\infty} \int_{\delta}^{T-\delta} |g_N(t)|\,dt = 0$．

いま $f(t)$ が周期 T の連続な周期関数ならば，$N \to \infty$ のとき $g_N * f(t)$ は $f(t)$ に一様収束することを示せ．

(iv) $F_N(t) = \frac{1}{TN}\left(\frac{\sin(\omega N t/2)}{\sin(\omega t/2)}\right)^2$ が成り立つことを示せ．

(v) 上の結果を利用して，$F_N(t)$ が (iii) にいう条件 a), b) をみたすことを示せ．