オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

次の凸計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}: \quad & \text{minimize} \quad & -\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i + c_i) \\
& \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& & x_i \geqq 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

ただし，$c_i \ (i = 1, \ldots, n)$ は正の定数，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ は決定変数である．^{T} は転置を表し，ln は自然対数を表す．

さらに，問題 P に関連して，$\lambda > 0$ をパラメータとして含む次の凸計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\lambda): \quad & \text{minimize} \quad & -\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i + c_i) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right) \\
& \text{subject to} \quad & x_i \geqq 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

以下の問 (i)-(v) に答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\lambda)$ のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を書け．

(ii) 問題 $\mathrm{P}(\lambda)$ の最適解を $\boldsymbol{x}(\lambda) = (x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_n(\lambda))^T$ とする．このとき，

$$
x_i(\lambda) = \max \left\{ 0, \frac{1}{\lambda} - c_i \right\} \quad (i = 1, \ldots, n)
$$

となることを示せ．

(iii) 問題 P と問題 $\mathrm{P}(\lambda)$ の目的関数の最小値をそれぞれ $\min(\mathrm{P})$，$\min(\mathrm{P}(\lambda))$ と書く．このとき，任意の $\lambda > 0$ に対して $\min(\mathrm{P}) \geqq \min(\mathrm{P}(\lambda))$ が成り立つことを示せ．

(iv) $\boldsymbol{x}(\lambda)$ が問題 P の最適解であるための必要十分条件は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda) = 1$ であることを示せ．

(v) $n = 3,\ c_1 = 0.3, c_2 = 0.7, c_3 = 2$ とする． 問題 P の最適解を求めよ．