力学系数学

6

$\mathbf{R}^{2n}$ の座標を $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=(q_1,q_2,\ldots,q_n,p_1,p_2,\ldots,p_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_{2n})=\boldsymbol{x}^T$ と書く．ただし，ベクトルまたは行列 A の転置を A^T と書く．関数 $F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=F(\boldsymbol{x})$ が与えられたとき，$(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))$ に対する微分方程式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial q_i},\qquad i=1,2,\ldots,n \tag{1}$$

を，F が生成するハミルトン方程式と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) $2n$ 次の実対称行列 $A=(A_{jk})$ を用いて関数 $F_A(\boldsymbol{x})$ が

$$F_A(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2n}x_j\,A_{jk}\,x_k \tag{2}$$

と与えられるならば，F_A が生成するハミルトン方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=JA\boldsymbol{x},\qquad J=\begin{pmatrix}0_n & I_n\\ -I_n & 0_n\end{pmatrix} \tag{3}$$

と書けることを示せ．ここで J は $2n$ 次正方行列であり，その中の I_n は n 次単位行列，0_n は n 次零行列である．

(ii) $2n$ 次の実対称行列 $B=(B_{jk})$ を用いて関数 $F_B(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^TB\boldsymbol{x}$ を与える．$\boldsymbol{x}(t)$ はハミルトン方程式 (3) をみたすとする．$F_B(\boldsymbol{x})$ に $\boldsymbol{x}(t)$ を代入したとき，任意の初期条件 $\boldsymbol{x}(0)$ に対して $F_B(\boldsymbol{x}(t))$ が t に依らないための必要十分条件は

$$AJB-BJA=0_{2n} \tag{4}$$

であることを証明せよ．

(iii) $A=I_{2n}$ とする．また，n 次正方行列 a,b,c を用いて

$$B=\begin{pmatrix}a & b\\ b^T & c\end{pmatrix},\qquad a^T=a,\qquad c^T=c$$

とおく．このとき，B が式 (4) をみたすための必要十分条件は

$$a=c,\qquad b^T=-b$$

であることを証明せよ．

(iv) とくに $n=2$ とし，B を

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

とする．F_B が生成するハミルトン方程式を解いて，$(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))$ を $(\boldsymbol{q}(0),\boldsymbol{p}(0))$ と t で表せ．また，$(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t))$ が t の周期関数であることを示し，その周期を求めよ．