確率・統計論

$\boxed{7}$

X を平均 0 で分散が 1 の実数値確率変数とする．すなわち

$$E[X] = 0, \quad E[X^2] = 1$$

である．ただしここで，確率変数 $f(X)$ $(f : \mathbf{R} \to \mathbf{R})$ の期待値を $E[f(X)]$ で表している．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を連続で有界な関数とする．このとき

$$(E[f(X)g(X)])^2 \leqq E[f(X)^2]E[g(X)^2]$$

が成り立つことを示せ．

(ii) $k > 0$ に対して

$$P(|X| \geqq k) \leqq \frac{1}{k^2}$$

が成り立つことを示せ．

(iii) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を 2 階連続微分可能な凸関数とする．このとき

$$E[h(X)] \geqq h(0)$$

が成り立つことを示せ．

（ヒント：Taylor の公式より，各 $x \in \mathbf{R}$ に対してある $0 < \epsilon < 1$ が存在して

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{1}{2}h''(\epsilon x)x^2$$

が成り立つことを用いよ.）

(iv) 特に，X を平均 0，分散 1 の標準正規分布に従う確率変数とする．すなわち

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx$$

を $-\infty < a \leqq b < \infty$ に対して満たすものとする．このとき X のモーメント母関数 $M(t) := E[\mathrm{e}^{tX}]$ $(t \in \mathbf{R})$ を求めよ．また，モーメント母関数を用いて期待値 $E[X^3]$，$E[X^4]$ を求めよ．