基礎数学 I

1

実数列 a_j $(j = 1,2,\ldots)$ と漸化式

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x - a_1, \\ p_k(x) &= (x - a_k)p_{k-1}(x) - p_{k-2}(x), \quad (k = 2,3,\ldots) \end{aligned}$$

によって実変数 x の多項式の列 $p_k(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$ を定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の x において $p_k(x)$ と $p_{k-1}(x)$ が同時に 0 となることはないことを示せ．

(ii) $x = \lambda$ を k 次多項式 $p_k(x)$ の実の零点とするとき，

$$p_{k+1}(\lambda)p_{k-1}(\lambda) < 0, \quad (k = 1,2,\ldots)$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 多項式 $p_k(x)$ の導関数を $p_k(x)$ とかく．

$$q_k(x) = p_k(x)p_{k-1}(x) - p_k(x)p_{k-1}(x), \quad (k = 1,2,\ldots)$$

とおくとき，任意の x において $q_k(x)$ $q_{k-1}(x)$，および，$q_k(x)$ 1 が成り立つことを示せ．

(iv) 多項式 $p_k(x)$ の実の零点は単根であることを示せ．

(v) 多項式 $p_k(x)$ の実の零点 $\lambda_i^{(k)}$ $(i = 1,2,\ldots,\ )$ が $\lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k)} < \cdots < \lambda^{(k)}$ をみたし，多項式 $p_{k+1}(x)$ の実の零点 $\lambda_j^{(k+1)}$ $(j = 1,2,\ldots,m\ )$ が $\lambda_1^{(k+1)} < \lambda_2^{(k+1)} < \cdots < \lambda_m^{(k+1)}$ をみたすとする．このとき， $= k$, $m = k + 1$ で

$$\lambda_1^{(k+1)} < \lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k+1)} < \lambda_2^{(k)} < \cdots < \lambda_k^{(k+1)} < \lambda_k^{(k)} < \lambda_{k+1}^{(k+1)}$$

が成り立つことを示せ．

¶ , -

T » ¶ t m M o < w M t t Q }

(i) m w ' s < w z – p T » p V ¶) Q } h | s ‹ w z – p A ¶ U O ' s M \ q ´ d }

(ii) n x w ' 7 q w ø p O (n log n) p T » p V ¶ m d } – UO (n log n) t s l o M g \ }

線形計画

3

次の線形計画問題 P を考える．

$$\begin{aligned} P: \ & \text{minimize} && c\,x \\ & \text{subject to} && Ax \geqq b \\ & && x \geqq 0 \end{aligned}$$

ここで，A は $m \times n$ 定数行列，b は m 次元定数ベクトル，c は n 次元定数ベクトル，x は n 次元変数ベクトルであり，$^{\top}$ は転置記号を表す．さらに，問題 P に関連して，非負のパラメータ $w = (w_1,\ldots,w_m)^{\top} \geqq 0$ を含む次の線形計画問題 $P(w)$ を考える．

$$\begin{aligned} P(w): \ & \text{minimize} && c\,x \\ & \text{subject to} && w^{\top}Ax \geqq w^{\top}b \\ & && x \geqq 0 \end{aligned}$$

問題 P および 問題 $P(w)$ は常に最適解をもつと仮定し，それらの問題の目的関数の最小値をそれぞれ f^* および $f(w)$ と表す．

以下の問 (i) − (iii) に答えよ．

(i) 任意の $w \geqq 0$ に対して $f(w) \leqq f^*$ が成り立つことを示せ．

(ii) $f(w) = f^*$ となるような $w \geqq 0$ が存在することを示せ．

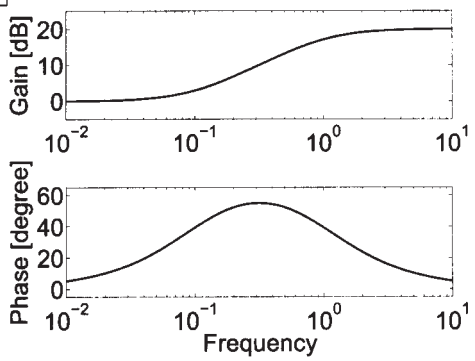
(iii) $\beta \leqq f^*$ であるような任意の実数 β に対して

$$S_\beta = \{ w \in \mathbb{R}^m \mid f(w) \geqq \beta, w \geqq 0 \}$$

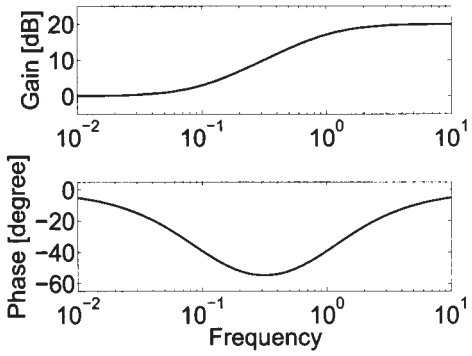
で定義される集合 S_β は空でない凸集合であることを示せ．

線形制御理論

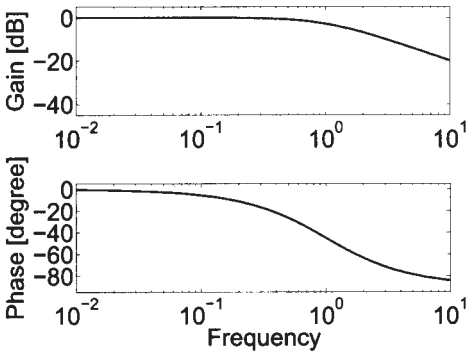
4



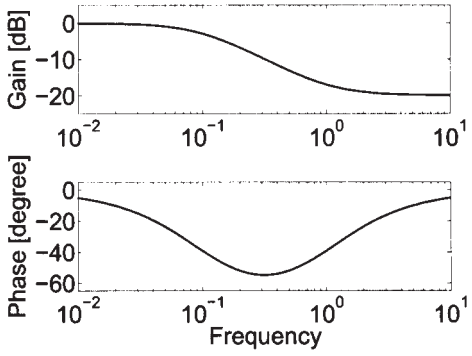
ボーデ線図 (a)



ボーデ線図 (b)



ボーデ線図 (c)



ボーデ線図 (d)

以下の問いに答えよ.

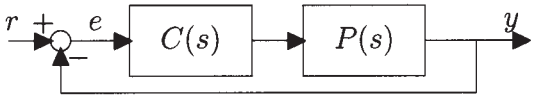
(i) 以下の伝達関数 $G_1(s), G_2(s)$ を表すボーデ線図は，それぞれ上記 (a)–(d) のどれになるかについて，理由を述べて答えよ.

$$G_1(s) = \frac{10s+1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{s+1}{10s+1}.$$

(ii) 下図のフィードバック系を考える．ここで

$$P(s) = \frac{2}{s+1}$$

とする．$C(s) = 1$ のときのゲイン交叉角周波数，ならびに r に単位階段関数を与えるときの定常位置偏差を求めよ．次に，$C(s)$ として位相遅れ補償器を用いて，ゲイン交叉角周波数が 1.8 以下であり，定常位置偏差を 0.1 以下になるようにしたい．それらを満たす位相遅れ補償器を一つ求めよ.



フィードバック系

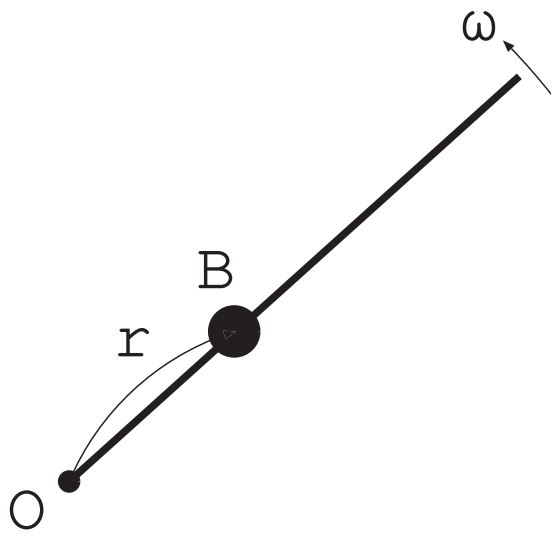
基礎力学

5

図に示すように，細い棒が点 O を中心に水平面内を一定の角速度 ω で回転し，質量 m の物体 B は棒にそって運動する．棒は十分長く，物体 B に摩擦力ははたらかないものとして，以下の設問に答えよ．

(i) B は，時刻 $t = 0$ に点 O から距離 a の位置にあり，棒方向の速度は 0 であったとする．その後の時刻 $t\,(> 0)$ での物体 B の点 O からの距離 r を求めよ．

(ii) 時刻 t における物体 B にはたらく棒の抗力の水平成分を求めよ．



基礎数学 II

6

$M(n,\mathbb{R})$ で $n \times n$ 実行列の全体を表し, $I \in M(n,\mathbb{R})$ で単位行列を表す. 以下の問いに答えよ.

(i) $I+X$ が可逆であるとして, $Y=(I-X)(I+X)^{-1}$ とおく. このとき, $I+Y$ もまた可逆で, $X=(I-Y)(I+Y)^{-1}$ が成り立つことを示せ.

(ii) $A \in M(n,\mathbb{R})$ が反対称行列で $I+A$ が可逆ならば, $G=(I-A)(I+A)^{-1}$ は直交行列であることを示せ. ただし, $A^{\top}=-A$ の成り立つ行列 A を反対称 (歪対称) 行列といい, 上付きの添え字 $^{\top}$ は行列の転置を表す.

(iii) ある $J \in M(n,\mathbb{R})$ に対し, $H \in M(n,\mathbb{R})$ は $H^{\top}J=-JH$ をみたし, $I+H$ は可逆とする. このとき $S=(I-H)(I+H)^{-1}$ は $S^{\top}JS=J$ をみたすことを示せ. (特に $J=I$ ならば, この問題は (ii) に帰着する.)

(iv) $n=2$ とする. (ii), (iii) における A, G, H, S を一般的な形で求めたい. (iii) における J はここでは特に $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. まず, 2 次の一般的な反対称行列を $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ とおいて, G を求めよ. さらに, $H=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$ とおいて, $H^{\top}J=-JH$ をみたすように H を定め, 続いて S を求めよ.

応用数学

1

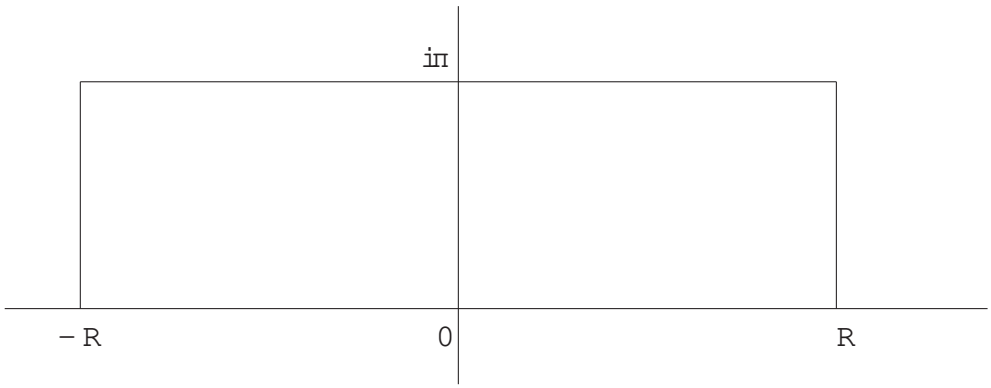
以下の問いに答えよ．

(i) $z = a$ が $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ の 1 位の極なら，$f(z)$ の $z = a$ における留数 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}} f(z)$ は

$$\underset{z=a}{\mathrm{Res}} f(z) = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

で与えられることを証明せよ．ただし，$p(z)$, $q(z)$ はともに，$z = a$ のまわりで正則で，かつ $p(a) = 0$, $q(a) = 0$, $q'(a) = 0$ である．

(ii) 関数 $g(x) = \dfrac{1}{\cosh x}$ のフーリエ変換 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx$ を，以下に示す積分路に沿っての積分を考えて計算せよ．ただし，$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$．



グラフ理論

2

$N = [G = (V,E),cap]$を有向ネットワークとする．ここで，G は点集合 V と枝集合 E からなる有限有向グラフで，各枝 $e \in E$ には，非負実数 $cap(e)$ が付されている．有向枝 e の始点を $tail(e)$，終点を $head(e)$ で表す．部分集合 $X \subseteq V$ から部分集合 $Y \subseteq V$ へ向かう有向枝の集合 $\{e \in E \mid tail(e) \in X, head(e) \in Y\}$ を $E(X,Y)$ と書く．とくに，点 $v \in V$ に対して，$E(\{v\},V-\{v\})$，$E(V-\{v\},\{v\})$ をそれぞれ $E^+(v)$，$E^-(v)$ で表す．

N においてソース $s \in V$，シンク $t \in V-\{s\}$ を指定したとき，次の二つの条件 (a),(b) を満たす実数値 $x(e), e \in E$ を s,t-フローと定義する．

(a) $\sum_{e \in E^+(v)} x(e) - \sum_{e \in E^-(v)} x(e) = 0, \forall v \in V-\{s,t\}$,

(b) $0 \quad x(e) \quad cap(e), \forall e \in E$．

x の流量 $f(x)$ を $\sum_{e \in E^+(s)} x(e) - \sum_{e \in E^-(s)} x(e)$ により定める．s,t-フローの流量の最大値を $\lambda(s,t)$ と記す．点集合 $S \subseteq V$ は，$s \in S, t \in V-S$ を満たすとき s,t-カットといい，その容量 $cap(S)$ を $\sum_{e \in E(S,V-S)} cap(e)$ により定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の s,t-フロー x，s,t-カット S に対し，

$$f(x) = \sum_{e \in E(S,V-S)} x(e) - \sum_{e \in E(V-S,S)} x(e) \quad cap(S)$$

が成り立つことを示せ．

(ii) s,t-フロー x に対して，$x(e) = cap(e)$ である枝 e の集合を A_x，$0 < x(e)$ である枝 e の集合を B_x，各枝 $e \in B_x$ の向きを逆にした枝の集合を $\overline{B_x}$ とする．グラフ $G_x = (V,(E-A_x) \cup \overline{B_x})$ において，s を始点とする有向路により到達可能な点の集合を S_x としたとき，$t \in S_x$ なら $f(x) < \lambda(s,t)$ が成り立つことを示せ．

(iii) s,t-フロー x が $f(x) = \lambda(s,t)$ を満たすとき，(ii) の S_x に対して，$cap(S_x) = \lambda(s,t)$ が成り立つことを示せ．

(iv) N において，異なる $k \quad 3$ 個の点 $v_1,v_2,\ldots,v_k \in V$ を選んだとき，$\lambda(v_1,v_k) \min\{\lambda(v_i,v_{i+1}) \mid i = 1,2,\ldots,k-1\}$ が成り立つことを示せ．

オペレーションズリサーチ

3

以下の問　，　に答えよ．

を　　の実対称行列とし，　　を

とする．ただし，　は転置を表す．以下の　に答えよ．

　　が半正定値行列のとき，　は凸関数であることを示せ．

を　から　への凸関数とし，次の非線形計画問題を考える．

この問題の大域的最適解の集合を　とし，　は空集合ではないとする．以下の　，　に答えよ．

　　が半正定値行列のとき，　は凸集合であることを示せ．

　　が正定値行列のとき，　の要素は唯一であることを示せ．

と　　を正の定数とする．決定変数が　　である次の非線形計画問題を考える．

–

　　を問題　の大域的最適解とする．次の　　に答えよ．

　問題　の カルーシュ・キューン・タッカー条件　　条件を書け．

　　である　に対して，　　であることを示せ．

　　とする．　　のとき，　　となることを示せ．ただし，　は集合　の要素の数を表す．

現代制御論

4

状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),\quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

で表される線形システムに対して，$u \in U(x_0)$ の制約の下でコスト関数

$$J(x_0,u) = \int_0^{+\infty} \left(x(t)^{\top} Q x(t) + u(t)^2 \right) dt \tag{2}$$

を最小化する最適レギュレータ問題を考える．ただし，$x(t), u(t)$ は，時刻 t における n 次元状態ベクトルとスカラー値制御入力であり，x_0 は n 次元初期状態ベクトルである．A，b および Q は，それぞれ $n \times n$ 実行列，n 次元実列ベクトルおよび $n \times n$ 非負定値実対称行列である． $^{\top}$ は行列またはベクトルの転置をあらわす．許容制御の集合 $U(x_0)$ を次式により定義する．

$$U(x_0) = \left\{ u : [0,+\infty) \to R \;\middle|\; \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \right\}$$

また，$n \times n$ 実対称行列 P を未知変数とする行列代数方程式

$$A^{\top} P + PA - Pbb^{\top} P + Q = 0 \tag{3}$$

を導入する．$A - bb^{\top} P$ のすべての固有値の実部が負である解 P のことを安定化解とよぶ．以下の問 (i) (iv) に答えよ．

(i) 行列 P は (3) 式を満たすと仮定する．任意の正数 τ と任意の制御入力 u に対して

$$\int_0^{\tau} \left(x(t)^{\top} Q x(t) + u(t)^2 \right) dt = x_0^{\top} P x_0 - x(\tau)^{\top} P x(\tau) + \int_0^{\tau} (u(t) + b^{\top} P x(t))^2 dt$$

が成り立つことを示せ．

(ii) 行列 P は (3) 式の安定化解であると仮定する．このとき，最適制御および最適コストは，それぞれ

$$u(t) = -b^{\top} P x(t),\ t \geq 0, \text{ および } \min_{u \in U(x_0)} J(x_0,u) = x_0^{\top} P x_0$$

で与えられることを示せ．

以下では，$n = 2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, a = 0, q \geq 0$ とおく．

(iii) (3) 式の安定化解 P を a, q を用いて表せ．

(iv) $q = 0$ のときの最適レギュレータの閉ループ極を求め，開ループ極と比較せよ．さらに，このときの最適コストを計算せよ．

物理統計学

5

1次元のランダムウオークを考える. 粒子は1ステップに時間τを要し, 距離aだけ移動するものとする. またαを$0<\alpha<1$を満足する実数として, 粒子が1ステップで正の方に移動する確率をα, 負の方に移動する確率を$1-\alpha$とする. 時刻$t=0$において原点$x=0$からスタートした粒子が, 時刻tにおいてxと$x+dx$の間にいる確率を$p(x,t)dx$と表す. 今, $t>>\tau$で十分多くのステップを移動したものとし, $p(x,t)$に対してはガウス分布が実現しているものとする. 以下の問いに答えよ.

(i) 時刻$t=(n+1)\tau$と$t=n\tau$における粒子の分布関数を関係づける離散的なマスター方程式（差分方程式）を示し, これに対する連続近似から, $p(x,t)$が次の偏微分方程式を満足することを示せ. また, ここに現れる定数vとDをα, a, τを用いて表せ.

$$\partial p/\partial t + v\partial p/\partial x - D\partial^2 p/\partial x^2 = 0. \tag{1}$$

(ii) 偏微分方程式(1)の, 本問の題意を満足する解を与えよ.

(iii) よく知られているように, ランダムウオークによる粒子の確率分布は2項分布により与えられる. Nが十分大きなときに成り立つ次の スターリングの公式

$\ln N! \simeq N(\ln N - 1) + (1/2)\ln(2\pi N)$

をこの2項分布に用いると, (ii)で得られたガウス分布を導くことが出来る. この方針に従い実際にガウス分布を導け.

力学系数学

6

以下の問いに答えよ．

(i) 実3次元ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ と書き，外積を $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ と書く．ベクトル $\boldsymbol{e}$ は $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle = 1$ をみたすものとする．線形作用素 P, Q, J を以下のように定義する．ベクトルの成分 $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)^{\mathsf{T}}$ を用いて P, Q, J に対応する行列を書け．ただし，一般の行列 R の転置行列を R^{T} と書く．

$$(1)\ P\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e} \qquad (2)\ Q\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e} \qquad (3)\ J\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{v}$$

(ii) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$(1)\ P^2 = P \qquad (2)\ Q^2 = Q \qquad (3)\ J^2 = -Q$$

$$(4)\ PQ = QP = 0 \qquad (5)\ PJ = JP = 0 \qquad (6)\ QJ = JQ = J$$

(iii) 実数 θ と (i) で定めた行列 J について次の式が成り立つことを示せ．

$$\exp(\theta J) = P + (\cos\theta)Q + (\sin\theta)J$$

ただし，正方行列 A の指数関数は $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ と定義される．

(iv) 一般に，n 次正方行列 A と n 次元定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

の初期値問題を解け．

(v) 実数 ω と3次元定数ベクトル $\boldsymbol{v}$ が与えられたとき，3次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \omega \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$$

の初期値問題の解を P, Q, J を用いて書け．ただし，$\boldsymbol{e}$ は (i) で与えた3次元定数ベクトルである．

‹ p ~w –

X 0, 1 w " j Y F ″ t H O ‹ p ! :, b s j

$$P(d_1 < X \quad d_2) = \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x^2/2} dx$$

∞ < d_1 < d_2 < ∞ t 0 ' o ‹ h b w q b . \ w q V, < w M t t Q .

(i) ‹ p ! :Y = X^2 w ‹ p S : – d . b s j,

$$P(Y \quad d) = \int_0^d p(y)dy$$

⁄d(> 0) t 0 ' o ‹ h b :p : (0,∞) → (0,∞) { .

(ii) : » $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ x f g ^ v

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$$

¸ m q b (b_∞ x :). ‹ p ! : » $(Z_n)_{n\in N}$

$$Z_n = a_n X + b_n$$

p [b .

(a) Z_n w

$$E[Z_n]$$

$$Var[Z_n] = E \quad (Z_n \quad E[Z_n])^2 ,$$

t |3 ″ ~

$$E[Z_n^3]$$

{ .

(b) w > 0 t 0 ' o

$$P(|Z_n \quad b_n| \quad) \quad \frac{Var[Z_n]}{2}$$

U R q b \ q ', \ w > 0 t 0 ' o

$$\lim_{n\to\infty} P(|Z_n \quad b_\infty| \quad) = 0$$

U R q b \ q Z. ¢ \ w \ q Z_n xn → ∞ w q V :b_∞ t ‹ p)
b q z . £