

## 線形計画

3

次の線形計画問題  $P$  を考える .

$$\begin{aligned} P : \quad & \text{minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ここで ,  $\mathbf{A}$  は  $m \times n$  定数行列 ,  $\mathbf{b}$  は  $m$  次元定数ベクトル ,  $\mathbf{c}$  は  $n$  次元定数ベクトル ,  $\mathbf{x}$  は  $n$  次元変数ベクトルであり ,  $^\top$  は転置記号を表す . さらに , 問題  $P$  に関連して , 非負のパラメータ  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)^\top \geq \mathbf{0}$  を含む次の線形計画問題  $P(\mathbf{w})$  を考える .

$$\begin{aligned} P(\mathbf{w}) : \quad & \text{minimize} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{w}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{w}^\top \mathbf{b} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

問題  $P$  および 問題  $P(\mathbf{w})$  は常に最適解をもつと仮定し , それらの問題の目的関数の最小値をそれぞれ  $f^*$  および  $f(\mathbf{w})$  と表す .

以下の問 (i) – (iii) に答えよ .

- (i) 任意の  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  に対して  $f(\mathbf{w}) \leq f^*$  が成り立つことを示せ .
- (ii)  $f(\mathbf{w}) = f^*$  となるような  $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  が存在することを示せ .
- (iii)  $\beta \leq f^*$  であるような任意の実数  $\beta$  に対して

$$S_\beta = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \mid f(\mathbf{w}) \geq \beta, \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \}$$

で定義される集合  $S_\beta$  は空でない凸集合であることを示せ .