線形計画

3

次の線形計画問題 P を考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \quad & \text{minimize} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b} \\ & \qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルであり，$^\top$ は転置記号を表す．さらに，問題 P に関連して，非負のパラメータ $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_m)^\top \geqq \boldsymbol{0}$ を含む次の線形計画問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ を考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\boldsymbol{w}): \quad & \text{minimize} \quad \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{b} \\ & \qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

問題 P および 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ は常に最適解をもつと仮定し，それらの問題の目的関数の最小値をそれぞれ f^* および $f(\boldsymbol{w})$ と表す．

以下の問 (i) − (iii) に答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0}$ に対して $f(\boldsymbol{w}) \leqq f^*$ が成り立つことを示せ．

(ii) $f(\boldsymbol{w}) = f^*$ となるような $\boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0}$ が存在することを示せ．

(iii) $\beta \leqq f^*$ であるような任意の実数 β に対して

$$S_\beta = \{\, \boldsymbol{w} \in I\!R^m \mid f(\boldsymbol{w}) \geqq \beta,\ \boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0} \,\}$$

で定義される集合 S_β は空でない凸集合であることを示せ．