基礎数学 II

$\boxed{6}$

$M(n,\mathbb{R})$ で $n\times n$ 実行列の全体を表し, $I\in M(n,\mathbb{R})$ で単位行列を表す. 以下の問いに答えよ.

(i) $I+X$ が可逆であるとして, $Y=(I-X)(I+X)^{-1}$ とおく. このとき, $I+Y$ もまた可逆で, $X=(I-Y)(I+Y)^{-1}$ が成り立つことを示せ.

(ii) $A\in M(n,\mathbb{R})$ が反対称行列で $I+A$ が可逆ならば, $G=(I-A)(I+A)^{-1}$ は直交行列であることを示せ. ただし, $A^\top=-A$ の成り立つ行列 A を反対称 (歪対称) 行列といい, 上付きの添え字 $^\top$ は行列の転置を表す.

(iii) ある $J\in M(n,\mathbb{R})$ に対し, $H\in M(n,\mathbb{R})$ は $H^\top J=-JH$ をみたし, $I+H$ は可逆とする. このとき $S=(I-H)(I+H)^{-1}$ は $S^\top JS=J$ をみたすことを示せ. (特に $J=I$ ならば, この問題は (ii) に帰着する.)

(iv) $n=2$ とする. (ii), (iii) における A, G, H, S を一般的な形で求めたい. (iii) における J はここでは特に $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ とする. まず, 2次の一般的な反対称行列を $A=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$ とおいて, G を求めよ. さらに, $H=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{R})$ とおいて, $H^\top J=-JH$ をみたすように H を定め, 続いて S を求めよ.