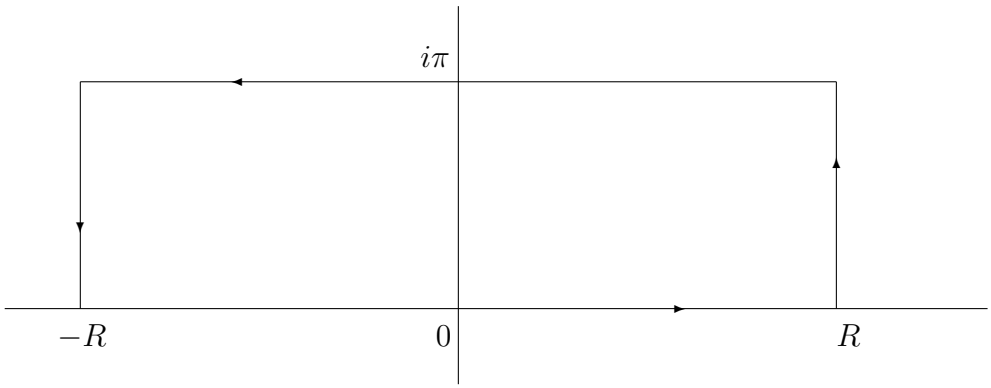
応用数学

1

以下の問いに答えよ.

(i) $z = a$ が $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ の 1 位の極なら, $f(z)$ の $z = a$ における留数 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$ は

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

で与えられることを証明せよ. ただし, $p(z)$, $q(z)$ はともに, $z = a$ のまわりで正則で, かつ $p(a) \neq 0$, $q(a) = 0$, $q'(a) \neq 0$ である.

(ii) 関数 $g(x) = \dfrac{1}{\cosh x}$ のフーリエ変換 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\xi x}dx$ を, 以下に示す積分路に沿っての積分を考えて計算せよ. ただし, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.