オペレーションズリサーチ

3

以下の問 (i)，(ii) に答えよ．

(i) A を $n \times n$ の実対称行列とし，$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$$

とする．ただし，$\top$ は転置を表す．以下の (a) に答えよ．

(a) A が半正定値行列のとき，g は凸関数であることを示せ．

f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への凸関数とし，次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

この問題の大域的最適解の集合を X とし，X は空集合ではないとする．以下の (b)，(c) に答えよ．

(b) A が半正定値行列のとき，X は凸集合であることを示せ．

(c) A が正定値行列のとき，X の要素は唯一であることを示せ．

(ii) α と b_i $(i = 1, \ldots, m)$ を正の定数とする．決定変数が $(x_1, \ldots, x_m, y, z_1, \ldots, z_m)$ である次の非線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \text{(P)}: & \text{minimize} & \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \alpha y + \sum_{i=1}^{m} z_i \\ & \text{subject to} & x_i \geqq b_i + y - z_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ & & y \geqq 0, \quad z_i \geqq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{array}$$

$(x_1^*, \ldots, x_m^*, y^*, z_1^*, \ldots, z_m^*)$ を問題 (P) の大域的最適解とする．次の (A)-(C) に答えよ．

(A) 問題 (P) の カルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．

(B) $z_i^* > 0$ である i に対して，$x_i^* = 1$ であることを示せ．

(C) $K = \{i \,|x_i^* < b_i\}$ とする．$y^* > 0$ のとき，$|K| \leqq \alpha$ となることを示せ．ただし，$|K|$ は集合 K の要素の数を表す．