物理統計学

$\boxed{5}$

1次元のランダムウオークを考える．粒子は1ステップに時間τを要し，距離aだけ移動するものとする．またαを$0<\alpha<1$を満足する実数として，粒子が1ステップで正の方に移動する確率をα，負の方に移動する確率を$1-\alpha$とする．時刻$t=0$において原点$x=0$からスタートした粒子が，時刻tにおいてxと$x+dx$の間にいる確率を$p(x,t)dx$と表す．今，$t>>\tau$で十分多くのステップを移動したものとし，$p(x,t)$に対してはガウス分布が実現しているものとする．以下の問いに答えよ．

(i) 時刻$t=(n+1)\tau$と$t=n\tau$における粒子の分布関数を関係づける離散的なマスター方程式（差分方程式）を示し，これに対する連続近似から，$p(x,t)$が次の偏微分方程式を満足することを示せ．また，ここに現れる定数vとDをα, a, τを用いて表せ．

$$\partial p/\partial t + v\partial p/\partial x - D\partial^2 p/\partial x^2 = 0. \tag{1}$$

(ii) 偏微分方程式(1)の，本問の題意を満足する解を与えよ．

(iii) よく知られているように，ランダムウオークによる粒子の確率分布は2項分布により与えられる．Nが十分大きなときに成り立つ次の スターリングの公式

$\ln N! \simeq N(\ln N - 1) + (1/2)\ln(2\pi N)$

をこの2項分布に用いると，(ii)で得られたガウス分布を導くことが出来る．この方針に従い実際にガウス分布を導け．