力学系数学

6

以下の問いに答えよ.

(i) 実3次元ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ と書き，外積を $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ と書く．ベクトル $\boldsymbol{e}$ は $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle = 1$ をみたすものとする．線形作用素 P, Q, J を以下のように定義する．ベクトルの成分 $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)^\top$ を用いて P, Q, J に対応する行列を書け．ただし，一般の行列 R の転置行列を $R^\top$ と書く.

(1) $P\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}$　(2) $Q\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}$　(3) $J\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{v}$

(ii) 次の関係式が成り立つことを示せ.

(1) $P^2 = P$　(2) $Q^2 = Q$　(3) $J^2 = -Q$

(4) $PQ = QP = 0$　(5) $PJ = JP = 0$　(6) $QJ = JQ = J$

(iii) 実数 θ と (i) で定めた行列 J について次の式が成り立つことを示せ.

$$\exp(\theta J) = P + (\cos\theta)Q + (\sin\theta)J$$

ただし，正方行列 A の指数関数は $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ と定義される.

(iv) 一般に，n 次正方行列 A と n 次元定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，n 次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

の初期値問題を解け.

(v) 実数 ω と3次元定数ベクトル $\boldsymbol{v}$ が与えられたとき，3次元ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \omega \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$$

の初期値問題の解を P, Q, J を用いて書け．ただし，$\boldsymbol{e}$ は (i) で与えた3次元定数ベクトルである.