確率・統計論

7

X を平均 0, 分散 1 の標準正規分布に従う確率変数, すなわち

$$P(d_1 < X \leqq d_2) = \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx$$

を $-\infty < d_1 < d_2 < \infty$ に対して満たすものとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 確率変数 $Y = X^2$ の確率密度関数を計算せよ. すなわち,

$$P(Y \leqq d) = \int_0^d p(y) dy$$

を各 $d(> 0)$ に対して満たす関数 $p : (0, \infty) \to (0, \infty)$ を求めよ.

(ii) 実数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はそれぞれ極限

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b_\infty$$

を持つとする (b_∞ は定数). 確率変数列 $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$Z_n = a_n X + b_n$$

で定義する.

(a) Z_n の平均

$$E[Z_n]$$

分散

$$\mathrm{Var}[Z_n] = E\left[(Z_n - E[Z_n])^2\right],$$

及び 3 次モーメント

$$E[Z_n^3]$$

を求めよ.

(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$P(|Z_n - b_n| \geqq \epsilon) \leqq \frac{\mathrm{Var}[Z_n]}{\epsilon^2}$$

が成立することを示し, これより任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} P(|Z_n - b_\infty| \geqq \epsilon) = 0$$

が成立することを導け. (このことを Z_n は $n \to \infty$ のとき定数 b_∞ に確率収束すると呼ぶ.)