線形計画

3

次の線形計画問題 P(θ) を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\theta): \quad \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x_i + y_i) \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i\,(x_i + y_i) = 1, \\
& \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \theta, \\
& x_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\
& y_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

ここで，$x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ は決定変数であり，$a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ は正定数，θ は実パラメータである．正定数 $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ は次の条件を満たすと仮定する．

$$
i < j \implies \frac{a_i}{b_i} > \frac{a_j}{b_j}
$$

以下の問 (i) – (v) に答えよ．

(i) $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．x_k と y_k を基底変数，それら以外のすべての変数を非基底変数とする基底解を計算せよ．さらにその基底解が問題 P(θ) の実行可能解であるようなパラメータ θ の範囲を求めよ．

(ii) x_n と y_n を基底変数，それら以外のすべての変数を非基底変数とする基底解は問題 P(0) の最適解であることを示せ．

(iii) 問 (ii) の基底解が問題 P(θ) の最適解となるようなパラメータ θ の範囲を求めよ．

(iv) 問題 P(θ) の双対問題を D(θ) と表す．問題 D(θ) を書け．

(v) 問題 D(0) の最適解を求めよ．

Linear Programming

3

Consider the following linear programming problem $\mathrm{P}(\theta)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\theta): \quad \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x_i + y_i) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i\,(x_i + y_i) = 1, \\ & \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \theta, \\ & x_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ & y_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

where $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ are decision variables, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ are positive constants, and θ is a real parameter. Assume that the positive constants $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ satisfy the following condition:

$$i < j \implies \frac{a_i}{b_i} > \frac{a_j}{b_j}$$

Answer the following questions **(i)** – **(v)**:

(i) Let $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Compute the basic solution such that x_k and y_k are basic variables and all the rest of the variables are non-basic variables. Moreover, find the range of parameter θ such that this basic solution is feasible to problem $\mathrm{P}(\theta)$.

(ii) Show that the basic solution such that x_n and y_n are basic variables and all the rest of the variables are non-basic variables is optimal to problem $\mathrm{P}(0)$.

(iii) Find the range of θ such that the basic solution of (ii) is optimal to problem $\mathrm{P}(\theta)$.

(iv) Let $\mathrm{D}(\theta)$ denote the dual problem of $\mathrm{P}(\theta)$. Write out $\mathrm{D}(\theta)$.

(v) Find an optimal solution of problem $\mathrm{D}(0)$.