線形計画

3

次の線形計画問題 $\mathrm{P}(\theta)$ を考える.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\theta): \quad \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i + y_i) \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i (x_i + y_i) = 1, \\
& \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \theta, \\
& x_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\
& y_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

ここで, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ は決定変数であり, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ は正定数, θ は実パラメータである. 正定数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ は次の条件を満たすと仮定する.

$$i < j \implies \frac{a_i}{b_i} > \frac{a_j}{b_j}$$

以下の問 (i) – (v) に答えよ.

(i) $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ とする. x_k と y_k を基底変数, それら以外のすべての変数を非基底変数とする基底解を計算せよ. さらにその基底解が問題 $\mathrm{P}(\theta)$ の実行可能解であるようなパラメータ θ の範囲を求めよ.

(ii) x_n と y_n を基底変数, それら以外のすべての変数を非基底変数とする基底解は問題 $\mathrm{P}(0)$ の最適解であることを示せ.

(iii) 問 (ii) の基底解が問題 $\mathrm{P}(\theta)$ の最適解となるようなパラメータ θ の範囲を求めよ.

(iv) 問題 $\mathrm{P}(\theta)$ の双対問題を $\mathrm{D}(\theta)$ と表す. 問題 $\mathrm{D}(\theta)$ を書け.

(v) 問題 $\mathrm{D}(0)$ の最適解を求めよ.

Linear Programming

3

Consider the following linear programming problem P(θ).

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\theta): \quad \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i + y_i) \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i (x_i + y_i) = 1, \\ & \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \theta, \\ & x_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ & y_i \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

where $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ are decision variables, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ are positive constants, and θ is a real parameter. Assume that the positive constants $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ satisfy the following condition:

$$i < j \implies \frac{a_i}{b_i} > \frac{a_j}{b_j}$$

Answer the following questions **(i)** – **(v)**:

(i) Let $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Compute the basic solution such that x_k and y_k are basic variables and all the rest of the variables are non-basic variables. Moreover, find the range of parameter θ such that this basic solution is feasible to problem P(θ).

(ii) Show that the basic solution such that x_n and y_n are basic variables and all the rest of the variables are non-basic variables is optimal to problem P(0).

(iii) Find the range of θ such that the basic solution of (ii) is optimal to problem P(θ).

(iv) Let D(θ) denote the dual problem of P(θ). Write out D(θ).

(v) Find an optimal solution of problem D(0).