グラフ理論

2

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る有向グラフ，$N=[G,w]$ を G の各枝 $e\in E$ に実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする．二点 $u,v\in V$ に対し，G における u から v への有向経路 $P\subseteq E$ は同じ点を2度以上経由しないとき単純と呼び，その重み $w(P)$ を $\sum_{e\in P}w(e)$ で定める．u から v への距離 $d(u,v)$ を u から v への単純有向経路 P の中でその重み $w(P)$ の最小値として定める．ただし，u から v への有向経路が存在しないとき $d(u,v)=\infty$，$u=v$ のとき $d(u,v)=0$ とする．ここで，一つの点 $s\in V$ を指定し，この点 s から他のすべての点 $v\in V$ への距離 $d(s,v)$ を求める問題を単一始点最短路問題と呼ぶ．以下の問いに答えよ．

(i) N が有向閉路をもたないとき，単一始点最短路問題を線形時間で解くアルゴリズムを記述し，その正当性について説明せよ．

(ii) N の枝重みがすべて非負であるとする（有向閉路は存在し得る）．このとき，単一始点最短路問題を解くダイクストラ法を記述し，その正当性について説明せよ．また，その時間計算量を評価せよ．

(iii) N が負の枝重みをもつとき，単一始点最短路問題に対するダイクストラ法の出力する値は正しい距離とならないことがある．そのような具体例を作成し，ダイクストラ法の出力する値が正しい距離とならないことを説明せよ．

Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ denote a directed graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. For two vertices $u, v \in V$, a directed path $P \subseteq E$ from u to v is called *simple* if it does not visit the same vertex more than once, and its weight $w(P)$ is defined to be $\sum_{e \in P} w(e)$. The distance $d(u, v)$ from u to v is defined to be the minimum among the weights $w(P)$ of simple paths P from u to v, where $d(u, v) = 0$ for $u = v$, and $d(u, v)$ is defined to be ∞ if G has no path P from u to v. Given a designated vertex $s \in V$, the *single source shortest path problem* requires to compute the distance $d(s, v)$ for all vertices $v \in V$. Answer the following questions.

(i) Assume that N has no directed cycle. Describe a linear-time algorithm for the single source shortest path problem together with a proof for its correctness.

(ii) Assume that all edge weights in N are nonnegative, where N possibly contains a directed cycle. Describe Dijkstra's algorithm for the single source shortest path problem together with a proof for its correctness. Also evaluate its time complexity.

(iii) If N contains an edge with a negative weight, then Dijkstra's algorithm may fail to output the correct distance. Construct such an example, and explain how Dijkstra's algorithm fails to compute the correct distance.