オペレーションズ・リサーチ

3

$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$，$\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$ とする．関数 $\psi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ を

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$$

と定義する．ただし，ln は自然対数を表し，$0 \ln 0 = 0$ とする．さらに，関数 $B_\psi : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \psi(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{y}) - \nabla\psi(\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

ただし，$\top$ は転置記号である．

次に，パラメータ $t \in \mathbb{R}$ を含む非線形計画問題 $\mathrm{P}(t)$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(t) & \text{minimize} & t\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & & x_i \geqq 0\ \ (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

ここで，決定変数は $\boldsymbol{x}$ であり，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ は定数ベクトルである．問題 $\mathrm{P}(t)$ には唯一の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在し，$x_i(t) > 0\ (i = 1, \ldots, n)$ が成り立つことが知られている．以下の問 (i)–(iv) に答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ に対して，$B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ となることを示せ．

(ii) 問題 $\mathrm{P}(t)$ のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) を書け．

(iii) $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(iv) ベクトル $\boldsymbol{c}$ の成分 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対して $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$ が成り立つとする．$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = (0, \ldots, 0, 1)^\top$ となることを示せ．

Operations Research

3

Let $\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ and $\mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$. Let $\psi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ be a function defined by

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i,$$

where ln denotes the natural logarithm with the convention $0 \ln 0 = 0$. Moreover, let $B_\psi : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ be a function defined by

$$B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \psi(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{y}) - \nabla\psi(\boldsymbol{y})^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

where $\top$ denotes transposition.

Consider the following nonlinear programming problem $\mathrm{P}(t)$ with a real parameter t.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(t) & \text{minimize} & t\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & & x_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

where $\boldsymbol{x}$ is the vector of decision variables, and $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ and $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ are constant vectors. It is known that the problem $\mathrm{P}(t)$ has a unique solution $\boldsymbol{x}(t)$ such that $x_i(t) > 0,\ i = 1, \ldots, n$.

Answer the following questions (i)–(iv).

(i) Show that $B_\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ for all $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

(ii) Write the Karush-Kuhn-Tucker conditions for the problem $\mathrm{P}(t)$.

(iii) Find the solution $\boldsymbol{x}(t)$.

(iv) Suppose that the elements $c_1, \ldots, c_n$ of the vector $\boldsymbol{c}$ satisfy $c_1 > c_2 > \cdots > c_n$. Show that $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = (0, \ldots, 0, 1)^\top$.