力学系数学

6

$\mathbb{R}^{n\times n}$ で $n\times n$ 実行列の全体を表す．$\mathbb{R}^{n\times n}$ において次の常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{dY}{dt} = (A+\lambda B(t))Y, \quad Y(0) = I. \tag{$*$}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は定数行列，$B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は $t=0$ を含むある区間 (a,b) で定義された連続関数で，λ は実のパラメータである．また，I は単位行列である．特に，$\lambda = 0$ のときの微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(0) = I$$

の解はよく知られているように $X(t) = e^{tA}$ で与えられる．以下の各問に答えよ．

(i) $(*)$ の解を $Y(t) = e^{tA}W(t)$ の形に仮定して，$W(t)$ に対する微分方程式を導き，それを利用して $Y(t)$ のみたすべき積分方程式を見出せ．

(ii) (i) で導いた積分方程式の解を $Y(t;\lambda)$ で表す．$Y(t;\lambda)$ が λ について微分可能であるのは既知として，

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}Y(t;\lambda)\right|_{\lambda=0} = n!Y_n(t), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

を示せ．ただし，$Y_n(t)$ は以下のように定義される．

$$Y_0(t) = e^{tA},$$

$$Y_n(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)Y_{n-1}(s)ds, \quad n = 1,2,\cdots \tag{$**$}$$

(iii) (a,b) の任意の閉部分区間で $t=0$ をその中に含むようなものを J とし，定数 M, β を以下の式で定義する．ただし，$\|\cdot\|$ で行列ノルムを表す．

$$M := \max_{t\in J}\|e^{tA}\|, \quad \beta := \max_{t\in J}\|B(t)\|.$$

$(**)$ を用いて，$t \in J$ のとき，以下の評価式を証明せよ．

$$\|Y_n(t)\| \leqq \frac{M}{n!}(\beta M|t|)^n$$

Mathematics for Dynamical Systems

6

Let $\mathbb{R}^{n\times n}$ denote the linear space of $n\times n$ real matrices. Consider the initial value problem for the ordinary differential equation given on $\mathbb{R}^{n\times n}$ by

$$\frac{dY}{dt} = (A + \lambda B(t))Y, \quad Y(0) = I, \qquad (*)$$

where A, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ are, respectively, a constant matrix and a continuous function defined on an interval (a, b) including $t = 0$, and where λ is a real parameter, and I is the identity. As is well-known, the solution to the equation $(*)$ with $\lambda = 0$,

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad X(0) = I,$$

is given by $X(t) = e^{tA}$. Answer each of the following questions.

(i) On assuming that a solution to $(*)$ takes the form $Y(t) = e^{tA}W(t)$, find an differential equation for $W(t)$, and thereby obtain an integral equation that $Y(t)$ should be subject to.

(ii) Denote by $Y(t;\lambda)$ a solution to the integral equation found in (i). Given the fact that $Y(t;\lambda)$ is differentiable with respect to λ, show that

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}Y(t;\lambda)\bigg|_{\lambda=0} = n!Y_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

where $Y_n(t)$'s are defined as follows:

$$Y_0(t) = e^{tA},$$

$$Y_n(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)Y_{n-1}(s)ds, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (**)$$

(iii) Let J denote an arbitrary closed sub-interval of (a, b) such that $0 \in J$, and M and β be constants determined, respectively, by

$$M := \max_{t\in J} \|e^{tA}\|, \quad \beta := \max_{t\in J} \|B(t)\|,$$

where $\|\cdot\|$ denotes a matrix norm. By using $(**)$, show that

$$\|Y_n(t)\| \leqq \frac{M}{n!}(\beta M|t|)^n \quad \text{for} \quad t \in J.$$