確率・統計論

7

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ は，標本空間 Ω, σ 加法族 $\mathfrak{F}$, 確率測度 P からなる確率空間とする．Ω 上の確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ があるとする．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) \geqq 0$ をみたす Borel 可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える．正の実数 t に対して，$U_t := \{\omega \in \Omega \,|\, f(X(\omega)) \geqq t\}$ とおけば，$U_t \in \mathfrak{F}$ であり，

$$P(U_t) = P(f(X) \geqq t) = \int_{U_t} P(d\omega)$$

は $f(X) \geqq t$ となる確率を与える．また，

$$E(f(X)) = \int_{\Omega} f(X(\omega)) P(d\omega)$$

が有限値ならば，これは $f(X)$ の期待値を定める．以下の問いに答えよ．

(i) 次の関係式が成り立つことを証明せよ．

$$P(U_t) \ \leqq \ \frac{E(f(X))}{t}$$

(ii) X の期待値 $m := E(X)$ が存在するとする．X の期待値の周りの n 次のモーメントを

$$\mu_n := E((X-m)^n) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定義する．このとき任意の正の実数 k と任意の正の整数 n に対して

$$P\Big(|X-m| \geqq k(\mu_{2n})^{\frac{1}{2n}}\Big) \ \leqq \ \frac{1}{k^{2n}}$$

が成り立つことを示せ．

(iii) X は確率密度関数

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

を持つ確率変数とする．ここで α は正の実数である．X の期待値 m と，m の周りの 2 次のモーメント μ_2 を求めよ．

(iv) $k > 1$ をみたす実数 k に対して，(iii) で与えた確率密度関数について

$$P\Big(|X-m| \geqq k\sqrt{\mu_2}\Big)$$

を求めよ．

Probability and Statistics

7

Let $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ be a probability space, which consists of the sample space Ω, the σ-field $\mathfrak{F}$, and the probability measure P. Let $X : \Omega \to \mathbb{R}$ be a random variable. Assume that a Borel measurable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $f(x) \geqq 0$ for arbitrary $x \in \mathbb{R}$. For a positive real number t, put $U_t := \{\omega \in \Omega \,|\, f(X(\omega)) \geqq t\}$. Then $U_t \in \mathfrak{F}$. The probability for $f(X) \geqq t$ is given by

$$P(U_t) = P(f(X) \geqq t) = \int_{U_t} P(d\omega).$$

The expectation value of $f(X)$ is defined to be

$$E(f(X)) = \int_{\Omega} f(X(\omega)) P(d\omega),$$

if the integral converges. Answer each of the following questions.

(i) Prove the inequality

$$P(U_t) \leqq \frac{E(f(X))}{t}.$$

(ii) Assume that the expectation value of X, $m := E(X)$, exists. Define the n-th moment of X about m to be

$$\mu_n := E((X-m)^n) \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

Prove that

$$P\left(|X - m| \geqq k(\mu_{2n})^{\frac{1}{2n}}\right) \leqq \frac{1}{k^{2n}}$$

for an arbitrary positive real number k and an arbitrary positive integer n.

(iii) Let X be a random variable with the probability density function

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

where α is a positive real number. Compute the expectation value m of X and the second moment μ_2 about m.

(iv) Evaluate

$$P\left(|X - m| \geqq k\sqrt{\mu_2}\right)$$

for a real number $k > 1$ with the probability density function given in (iii).