線形計画

$\boxed{3}$

つぎの最適化問題を考える．

$$
\text{(P)}:\quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$^\top$ は転置記号，$\boldsymbol{X}$ は次式で与えられる $\mathbb{R}^n$ の部分集合である．

$$
\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{a}_i s_i + \sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{b}_j t_j, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} s_i = 1,\ s_i \geqq 0\ (i = 1, \ldots, p),\ t_j \geqq 0\ (j = 1, \ldots, q) \end{array} \right\}
$$

ここで，p と q は正整数，$\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ と $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ は n 次元定数ベクトルである．$\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\boldsymbol{b}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, \ldots, q)$, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ とする．

以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{X}$ は凸集合であることを示せ．

(ii) 問題 (P) が有界 でない (すなわち $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^k = -\infty$ となるような点列 $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset \boldsymbol{X}$ が存在する) ための必要十分条件は，ある $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して $\boldsymbol{b}_j^\top \boldsymbol{c} < 0$ が成り立つことである．このことを証明せよ．

(iii) すべての $j \in \{1, \ldots, q\}$ に対して $\boldsymbol{b}_j^\top \boldsymbol{c} \geqq 0$ が成り立つとし，問題 (P) の最適解の集合を $\boldsymbol{S}$ と表記する．集合 $\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．さらに，集合 $\boldsymbol{S}$ が有界である (すなわち $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^k\| = \infty$ となるような点列 $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset \boldsymbol{S}$ が存在しない) ための必要十分条件を書け．[証明は不要]

Linear Programming

$\boxed{3}$

Consider the following optimization problem:

$$\text{(P)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \end{array}$$

where $\boldsymbol{x}$ is an n-dimensional vector of variables, $\boldsymbol{c}$ is an n-dimensional constant vector, $^\top$ denotes transposition, and $\boldsymbol{X}$ is the set given by

$$\boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{a}_i s_i + \sum_{j=1}^{q} \boldsymbol{b}_j t_j, \\ \sum_{i=1}^{p} s_i = 1, \;\; s_i \geqq 0 \; (i = 1, \ldots, p), \;\; t_j \geqq 0 \; (j = 1, \ldots, q) \end{array} \right\}.$$

Here, p and q are positive integers, $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ and $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ are n-dimensional constant vectors. We assume that $\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\boldsymbol{b}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, \ldots, q)$, and $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$.

Answer the following questions.

(i) Show that $\boldsymbol{X}$ is a convex set.

(ii) Show that problem (P) is unbounded (that is, there exists a sequence $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset \boldsymbol{X}$ such that $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^k = -\infty$) if and only if $\boldsymbol{b}_j^\top \boldsymbol{c} < 0$ for some $j \in \{1, \ldots, q\}$.

(iii) Assume that $\boldsymbol{b}_j^\top \boldsymbol{c} \geqq 0$ for all $j \in \{1, \ldots, q\}$, and let $\boldsymbol{S}$ denote the set of optimal solutions of problem (P). Give an explicit expression of the set $\boldsymbol{S}$ in terms of $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$, and $\boldsymbol{c}$. Moreover, write a necessary and sufficient condition under which the set $\boldsymbol{S}$ is bounded (that is, there does not exist a sequence $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset \boldsymbol{S}$ such that $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^k\| = \infty$). [Proof is not necessary.]