応用数学

1

関数 $f(z)$ を，原点を中心とする半径 R の円板 $D_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ において正則な関数とする．また，$g(z)$ を複素数平面 $\mathbb{C}$ 上で正則な関数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) 円板 $D_R(0)$ 上で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ならば，

$$|c_n| \leqq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \qquad (0 < r < R)$$

の成り立つことを証明せよ．

(ii) 円板 $D_R(0)$ 上で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ならば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \qquad (0 < r < R)$$

の成り立つことを証明せよ．

(iii) $|f(z)|$ が円板 $D_R(0)$ 上で最大値をとるならば，$f(z)$ は定数関数となることを証明せよ．

(iv) 式 (1) をみたす正の整数 n と正の定数 M, R が存在するならば，関数 $g(z)$ は n 次以下の多項式となることを示せ．

$$|g(z)| \leqq M|z|^n \qquad (|z| \geqq R) \tag{1}$$

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

Let $f(z)$ be a holomorphic function on the open disk with the center at the origin and of radius R: $D_R(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Let $g(z)$ be a holomorphic function on $\mathbb{C}$. Answer each of the following questions.

(i) Prove that if $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ on $D_R(0)$ then

$$|c_n| \leqq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$$

for $0 < r < R$.

(ii) Prove that if $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ on $D_R(0)$ then

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

for $0 < r < R$.

(iii) Prove that if $|f(z)|$ takes a maximum value on $D_R(0)$ then $f(z)$ must be a constant function.

(iv) Suppose that there exist some positive integer n and constants $M > 0$ and $R > 0$ such that

$$|g(z)| \leqq M|z|^n$$

for all z with $|z| \geqq R$. Then show that $g(z)$ is a polynomial in z of degree less than or equal to n.