グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る有向グラフとし，$N=[G,\mathrm{cap}]$ を G の各枝 $e\in E$ に実数値の容量 $\mathrm{cap}(e)>0$ を与えて得られるネットワークとする．節点集合 X に始点を持ち，節点集合 Y に終点をもつ枝の集合を $E(X,Y)$ と書き，節点 v を始点とする枝の集合を $E^+(v)$，節点 v を終点とする枝の集合を $E^-(v)$ と書く．非負実数の集合を $\mathbb{R}_+$ で表す．指定された 2 点 $s,t\in V$ に対し，流量保存則 $\sum_{e\in E^+(v)} f(e)-\sum_{e\in E^-(v)} f(e)=0$, $\forall v\in V-\{s,t\}$ および容量制約 $f(e)\leqq \mathrm{cap}(e), \forall e\in E$ を満たす関数 $f: E\to\mathbb{R}_+$ を (s,t) フローと呼び，その流量 $\mathrm{val}(f)$ を $\sum_{e\in E^+(s)} f(e)-\sum_{e\in E^-(s)} f(e)$ で定める．以下の問いに答えよ．

(i) $s\in S, t\in T$ を満たす任意の節点集合 V の分割 $S, T=V-S$ に対して，$\mathrm{cap}(S,T)=\sum_{e\in E(S,T)}\mathrm{cap}(e)$ と定めるとき，任意の (s,t) フロー f に対して，$\mathrm{val}(f)\leqq\mathrm{cap}(S,T)$ が成り立つことを証明せよ．

(ii) 与えられた (s,t) フロー f に対して定められる残余ネットワーク $N_f=[G_f=(V,E_f),\mathrm{cap}_f]$ の作り方を示せ．

(iii) 残余ネットワーク N_f において，s から t への有向路が存在するとき，そのひとつを P とする．P 上の枝の N_f における容量の最小値を Δ とするとき，N には流量が $\mathrm{val}(f)+\Delta$ である (s,t) フローが存在することを証明せよ．

(iv) 残余ネットワーク N_f が s から t への有向路をもたないとき，N_f において s から到達可能な節点の集合を S とし，$T=V-S$ とする．このとき各枝 $e\in E(S,T)\cup E(T,S)$ に対して，$\mathrm{cap}(e)$, $f(e)$ が満たす性質について述べよ．

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a directed graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, \mathrm{cap}]$ denote a network on G obtained by assigning a real value $\mathrm{cap}(e) > 0$ to each edge $e \in E$ as its capacity. For two subsets $X, Y \subseteq V$, let $E(X, Y)$ denote the set of edges which leave a vertex in X and enter a vertex in Y. For a vertex v, let $E^+(v)$ denote the set of edges leaving v, and $E^-(v)$ denote the set of edges entering v. Let $\mathbb{R}_+$ be the set of nonnegative reals. For two designated vertices $s, t \in V$, an (s,t)-flow is defined to be a mapping $f : E \to \mathbb{R}_+$ which satisfies $\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) = 0$, $\forall v \in V - \{s, t\}$ (flow conservation law) and $f(e) \leqq \mathrm{cap}(e)$, $\forall e \in E$ (capacity constraint), and its flow value $\mathrm{val}(f)$ is defined to be $\sum_{e \in E^+(s)} f(e) - \sum_{e \in E^-(s)} f(e)$. Answer the following questions.

(i) For a partition $S, T = V - S$ of V such that $s \in S$ and $t \in T$, define $\mathrm{cap}(S,T) = \sum_{e \in E(S,T)} \mathrm{cap}(e)$. Prove that $\mathrm{val}(f) \leqq \mathrm{cap}(S,T)$ holds for any (s,t)-flow f.

(ii) For a given (s,t)-flow f, show how to construct its residual network $N_f = [G_f = (V, E_f), \mathrm{cap}_f]$.

(iii) For an (s,t)-flow f in N, assume that there is a directed path P from s to t in the residual network N_f. Let Δ be the minimum cap_f of an edge in P. Prove that N has an (s,t)-flow whose flow value is $\mathrm{val}(f) + \Delta$.

(iv) For an (s,t)-flow f in N, assume that there is no directed path from s to t in the residual network N_f. Let S be the set of vertices which are reachable from s in N_f, and $T = V - S$. Describe what property holds for $\mathrm{cap}(e)$ and $f(e)$, $e \in E(S,T) \cup E(T,S)$.