オペレーションズ・リサーチ

3

つぎの凸2次計画問題を考える.

$$\mathrm{P}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b \end{array}$$

ただし, $\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 正定値対称行列, $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元ベクトル, b はスカラーであり, $^\top$ はベクトルの転置を表す. この問題は唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ をもつ.
$\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqq 0\}$ とする. パラメータ $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ を含むつぎの制約なし最小化問題を考える.

$$\mathrm{P}(\lambda, \rho): \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right)^2 \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して問題 $\mathrm{P}(\lambda, \rho)$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ をもつ.
　以下の問いに答えよ.

(i) 問題 P のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を用いて $\boldsymbol{x}^*$ を求めよ.

(ii) $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ を求めよ.

(iii) パラメータ $\lambda^* \in \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \lambda^* \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を満たすとする. このとき任意の $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda^*, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ となることを示せ.

(iv) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \geqq \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)^\top \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right)^2$$

(v) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ は存在することが知られている.
パラメータ λ の値に関わらず, $\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ となることを示せ.

Operations Research

3

Consider the following convex quadratic programming problem:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b, \end{array}$$

where $\boldsymbol{A}$ is an $n \times n$ symmetric positive definite matrix, $\boldsymbol{a}$ is an n-dimensional nonzero vector, b is a scalar, and the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector. This problem has a unique optimal solution $\boldsymbol{x}^*$.

Let $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqq 0\}$. Consider the following unconstrained minimization problem with parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\lambda, \rho): & \text{Minimize} & \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right)^2 \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

For each $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$, Problem $\mathrm{P}(\lambda, \rho)$ has a unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$.

Answer the following questions.

(i) Obtain $\boldsymbol{x}^*$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for Problem P.

(ii) Obtain $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$.

(iii) Suppose that a parameter $\lambda^* \in \mathbb{R}$ satisfies $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \lambda^* \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Show that $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda^*, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ for all $\rho \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Show that the following inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \geqq \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)^\top \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right)^2.$$

(v) It is known that $\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ exists for any $\lambda \in \mathbb{R}$. Show that $\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$.