オペレーションズ・リサーチ

3

つぎの凸２次計画問題を考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \quad & \text{Minimize} \quad \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{a}^{\top}\boldsymbol{x} = b \end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 正定値対称行列，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元ベクトル，b はスカラーであり，$^{\top}$ はベクトルの転置を表す．この問題は唯一の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ をもつ．

$\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqq 0\}$ とする．パラメータ $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ を含むつぎの制約なし最小化問題を考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\lambda, \rho): \quad & \text{Minimize} \quad \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \lambda\left(\boldsymbol{a}^{\top}\boldsymbol{x} - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^{\top}\boldsymbol{x} - b\right)^2 \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して問題 $\mathrm{P}(\lambda, \rho)$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ をもつ．

以下の問いに答えよ．

(i) 問題 P のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を用いて $\boldsymbol{x}^*$ を求めよ．

(ii) $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ を求めよ．

(iii) パラメータ $\lambda^* \in \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \lambda^*\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を満たすとする．このとき任意の $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda^*, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ となることを示せ．

(iv) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\rho \in \mathbb{R}_+$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \geqq \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)^{\top}\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) + \lambda\left(\boldsymbol{a}^{\top}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^{\top}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right)^2$$

(v) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，$\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ は存在することが知られている．パラメータ λ の値に関わらず，$\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ となることを示せ．

Operations Research

3

Consider the following convex quadratic programming problem:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \quad & \text{Minimize} \quad \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b, \end{aligned}$$

where $\boldsymbol{A}$ is an $n \times n$ symmetric positive definite matrix, $\boldsymbol{a}$ is an n-dimensional nonzero vector, b is a scalar, and the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector. This problem has a unique optimal solution $\boldsymbol{x}^*$.

Let $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqq 0\}$. Consider the following unconstrained minimization problem with parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\lambda, \rho): \quad & \text{Minimize} \quad \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - b\right)^2 \\ & \text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

For each $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$, Problem $\mathrm{P}(\lambda, \rho)$ has a unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$.

Answer the following questions.

(i) Obtain $\boldsymbol{x}^*$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for Problem P.

(ii) Obtain $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$.

(iii) Suppose that a parameter $\lambda^* \in \mathbb{R}$ satisfies $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \lambda^* \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Show that $\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda^*, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ for all $\rho \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Show that the following inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\rho \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \geqq \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)^\top \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) + \lambda\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right) + \rho\left(\boldsymbol{a}^\top \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) - b\right)^2.$$

(v) It is known that $\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho)$ exists for any $\lambda \in \mathbb{R}$. Show that $\lim_{\rho \to \infty} \bar{\boldsymbol{x}}(\lambda, \rho) = \boldsymbol{x}^*$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$.