物理統計学

5

$W(t)$ はウィナー過程で，$W(t_0) = w_0$ の条件のもとで，$w \leqq W(t) < w + \mathrm{d}w$ $(t > t_0)$ である確率は，$\mathrm{d}w$ が十分小さいとき遷移確率

$$p(w, t|w_0, t_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{(w-w_0)^2}{2(t-t_0)}\right)$$

を用いて，$p(w, t|w_0, t_0)\mathrm{d}w$ と表される．ウィナー過程は定常マルコフ過程である．

(i) $p(w, t|w_0, t_0)$ は $t > t_1 > t_0$ のときチャップマン・コルモゴロフ方程式

$$p(w, t|w_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 p(w, t|w_1, t_1) p(w_1, t_1|w_0, t_0)$$

を満足することを示せ．

(ii) n を正の整数として，$a_n(w, \tau)$ を

$$a_n(w, \tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 (w_1 - w)^n p(w_1, t_0 + \tau|w, t_0)$$

で定義する．$A_n(w) := \lim_{\tau \to 0} \dfrac{a_n(w, \tau)}{\tau}$ を計算し，フォッカー・プランク方程式を導け．

(iii) $p(w, t|w_0, t_0)$ が (ii) で求めたフォッカー・プランク方程式を満足することを確かめよ．

Physical Statistics

$\boxed{5}$

Let $W(t)$ be a Wiener process. The probability that $W(t)$ satisfies $w \leqq W(t) < w + \mathrm{d}w$ for $t > t_0$ with an initial condition $W(t_0) = w_0$ when $\mathrm{d}w$ is sufficiently small is $p(w, t|w_0, t_0)\mathrm{d}w$, where $p(w, t|w_0, t_0)$ denotes the transition probability

$$p(w, t|w_0, t_0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{(w - w_0)^2}{2(t - t_0)}\right).$$

The Wiener process is a stationary Markov process.

(i) Show that $p(w, t|w_0, t_0)$ obeys the Chapman-Kolmogorov equation,

$$p(w, t|w_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 p(w, t|w_1, t_1) p(w_1, t_1|w_0, t_0)$$

for $t > t_1 > t_0$.

(ii) Evaluate $A_n(w) := \lim_{\tau \to 0} \frac{a_n(w, \tau)}{\tau}$, where n is a positive integer and

$$a_n(w, \tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 (w_1 - w)^n p(w_1, t_0 + \tau|w, t_0).$$

Derive the Fokker-Planck equation for the Wiener process.

(iii) Verify that $p(w, t|w_0, t_0)$ obeys the Fokker-Planck equation derived in (ii).