線形計画

$\boxed{3}$

集合 $X \subseteqq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$，$Y \subseteqq \mathbb{R}^n$，$Z \subseteqq \mathbb{R}^n$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,\middle|\, \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m y_i \boldsymbol{a}^i,\ \ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \right\} \\
Y &= \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m y_i \boldsymbol{a}^i,\ \ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \right\} \\
Z &= \left\{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{z} \leqq 1 \ \ (i = 1, \ldots, m) \right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$^\top$ は転置記号であり，$\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元定数ベクトルであり，$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top$ である．

以下の問いに答えよ．

(i) 集合 X と Y が凸集合であることを示せ．

(ii) $\boldsymbol{x} \in Y$ を $\boldsymbol{0}$ でないベクトルとする．$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} > 0$ となる $\boldsymbol{z} \in Z$ が存在することを示せ．
ヒント：$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z}$ の最大化を考えよ．

(iii) $\boldsymbol{x} \in Y$ とする．次の条件 (C1) と (C2) を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ と $\boldsymbol{z} \in Z$ が存在することを示せ．

(C1) $y_i > 0$ である任意の i に対して $(\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{z} = 1$

(C2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X$

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Let sets $X \subseteqq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $Y \subseteqq \mathbb{R}^n$ and $Z \subseteqq \mathbb{R}^n$ be defined by

$$\begin{aligned} X &= \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,\middle|\, \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{a}^i, \ \ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \right\}, \\ Y &= \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{a}^i, \ \ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \right\}, \\ Z &= \{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \,|\, (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{z} \leqq 1 \ \ (i = 1, \ldots, m) \}, \end{aligned}$$

respectively. Here, $^\top$ denotes transposition, $\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ are n-dimensional nonzero vectors, and $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)^\top$.

Answer the following questions.

(i) Show that the sets X and Y are convex.

(ii) Let $\boldsymbol{x} \in Y$ be a nonzero vector. Show that there exists $\boldsymbol{z} \in Z$ such that $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} > 0$. Hint: Consider the maximization of $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z}$.

(iii) Let $\boldsymbol{x} \in Y$. Show that there exist $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ and $\boldsymbol{z} \in Z$ such that the following conditions (C1) and (C2) hold.

(C1) $(\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{z} = 1$ for all i such that $y_i > 0$;

(C2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X$.