グラフ理論

2

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純有向グラフとする．$\mathrm{R}(u;G)$ を G において節点 u から有向路で到達できる節点の集合と定め，$\mathrm{dist}(u,v;G)$ を節点 u から節点 v へ至る G の有向路の最短の長さとする．$v \notin \mathrm{R}(u;G)$ のときは $\mathrm{dist}(u,v;G) \triangleq |V|$ と定める．有向グラフ G から有向枝 $e \in E$ を削除した有向グラフを $G-e$ と記す．s,t を V の二つの節点とする．G は隣接リストにより貯えられているとする．以下の問いに答えよ．

(i) $t \in \mathrm{R}(s;G)$ と仮定する．節点 s から節点 t へ至る有向路で最短のものを求める $O(|V|+|E|)$ 時間アルゴリズムを与えよ．

(ii) $\mathrm{dist}(s,t;G-e) > \mathrm{dist}(s,t;G)$ を満たす有向枝 $e \in E$ が存在するかどうかを判定する $O(|V|+|E|)$ 時間アルゴリズムを与えよ．

(iii) $\mathrm{dist}(s,t;G) = \mathrm{dist}(t,s;G) = 3 < \mathrm{dist}(s,t;G-e) = \mathrm{dist}(t,s;G-e)$ である二節点 $s,t \in V$，有向枝 $e \in E$ をもつ有向グラフ $G=(V,E)$ の例を作成せよ．

An English Translation:

Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ be a simple directed graph with a vertex set V and an edge set E. Let $\mathrm{R}(u; G)$ denote the set of vertices reachable from a vertex u by a directed path in G and $\mathrm{dist}(u, v; G)$ denote the shortest length of a path from a vertex u to a vertex v in G, where we set $\mathrm{dist}(u, v; G) \triangleq |V|$ if $v \notin \mathrm{R}(u; G)$. Let $G - e$ denote the directed graph obtained from G by removing a directed edge $e \in E$. Let s and t be two vertices in V. Assume that G is stored in adjacency lists. Answer the following questions.

(i) Assume that $t \in \mathrm{R}(s; G)$. Give an $O(|V| + |E|)$-time algorithm that computes a directed path with the shortest length from s to t.

(ii) Give an $O(|V| + |E|)$-time algorithm that tests whether there exists a directed edge $e \in E$ such that $\mathrm{dist}(s, t; G - e) > \mathrm{dist}(s, t; G)$.

(iii) Construct an example of a directed graph $G = (V, E)$ that contains two vertices $s, t \in V$ and a directed edge $e \in E$ such that $\mathrm{dist}(s, t; G) = \mathrm{dist}(t, s; G) = 3 < \mathrm{dist}(s, t; G - e) = \mathrm{dist}(t, s; G - e)$.