

制御理論

4

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

により与えられる線形システムを考える。ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力、 $y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力であり、 \top は転置をあらわす。以下の問いに理由とともに答えよ。

(i) 任意の $t > 0$ に対して可制御性グラミアン

$$\int_0^t e^{-As} B B^\top e^{-A^\top s} ds$$

が正定値ならば、このシステムは可制御であることを証明せよ。

(ii) u から y までの伝達関数が $\frac{1}{s^2}$ となるような、最小実現 (A, B, C) を1つ求めよ。

(iii) (ii) で求めた (A, B, C) に対して、 $J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + 4u(t)^2) dt$ を最小化する $u(t)$ を求めよ。

An English Translation:

Control Theory

4

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is an observation output, and $^\top$ denotes transposition. Answer the following questions. Show the derivation process.

- (i) Prove that the system is controllable if the controllability Gramian

$$\int_0^t e^{-As}BB^\top e^{-A^\top s}ds$$

is positive definite for arbitrary $t > 0$.

- (ii) Find a minimal realization (A, B, C) such that the transfer function from u to y is $\frac{1}{s^2}$.

- (iii) For (A, B, C) obtained in (ii), find $u(t)$ that minimizes $J(u) = \int_0^\infty (y(t)^2 + 4u(t)^2) dt$.