オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

集合 I を $I=\{1,\ldots,m\}$ とし，関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top M\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}^\top\boldsymbol{x}$$

ただし，M は $n\times n$ 対称行列，$\boldsymbol{q}$ は n 次元ベクトルであり，$^\top$ は転置記号を表す．

次の非線形計画問題（P）を考える．

$$\text{(P)}:\quad \begin{array}{ll}\text{Minimize} & f(\boldsymbol{x})\\ \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^i)^\top\boldsymbol{x}\leqq b_i\ \ (i\in I)\end{array}$$

ここで，$\boldsymbol{a}^i\ (i\in I)$ は n 次元定数ベクトルであり，$b_i\ (i\in I)$ は定数である．

問題（P）に対して，次のカルーシュ・キューン・タッカー条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) をみたすベクトル $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{\lambda}^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)^\top\in\mathbb{R}^m$ が存在すると仮定する．

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla f(\boldsymbol{x}^*)+\displaystyle\sum_{i=1}^m\lambda_i^*\boldsymbol{a}^i=\boldsymbol{0}\\ (\boldsymbol{a}^i)^\top\boldsymbol{x}^*\leqq b_i,\ \lambda_i^*\geqq 0,\ ((\boldsymbol{a}^i)^\top\boldsymbol{x}^*-b_i)\lambda_i^*=0\ \ (i\in I)\end{array}\right.$$

さらに，$J=\{i\in I\mid(\boldsymbol{a}^i)^\top\boldsymbol{x}^*=b_i\}$, $C=\{\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n\mid(\boldsymbol{a}^i)^\top\boldsymbol{d}\leqq 0\ (i\in J)\}$, $C^0=\{\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n\mid(\boldsymbol{a}^i)^\top\boldsymbol{d}=0\ (i\in J)\}$ とする．

以下の問 (i)-(v) に答えよ．

(i) 任意の $\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^\top M\boldsymbol{d}+\nabla f(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{d}$ となることを示せ．

(ii) 任意の $\boldsymbol{d}\in C$ に対して，$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^\top\boldsymbol{d}\geqq 0$ となることを示せ．

(iii) 問題 (P) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\in C$ となることを示せ．

(iv) 任意の $\boldsymbol{d}\in C$ に対して，$\boldsymbol{d}^\top M\boldsymbol{d}\geqq 0$ が成り立つとする．このとき，$\boldsymbol{x}^*$ は問題 (P) の大域的最適解となることを示せ．

(v) $\boldsymbol{x}^*$ が問題 (P) の局所的最適解であれば，任意の $\boldsymbol{d}\in C^0$ に対して，$\boldsymbol{d}^\top M\boldsymbol{d}\geqq 0$ が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $I = \{1, \ldots, m\}$, and let a function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{x},$$

where M is an $n \times n$ symmetric matrix, $\boldsymbol{q}$ is an n dimensional vector, and the superscript $^\top$ denotes transposition.

Consider the following nonlinear programming problem (P):

$$\text{(P)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x} \leqq b_i \ \ (i \in I), \end{array}$$

where $\boldsymbol{a}^i$ $(i \in I)$ are n-dimensional vectors and b_i $(i \in I)$ are constants.

Suppose that there exist vectors $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)^\top \in \mathbb{R}^m$ satisfying the following Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem (P):

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* \leqq b_i, \ \lambda_i^* \geqq 0, \ ((\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* - b_i)\lambda_i^* = 0 \ \ (i \in I). \end{cases}$$

Let $J = \{i \in I \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{x}^* = b_i\}$, $C = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{d} \leqq 0 \ (i \in J)\}$ and $C^0 = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{a}^i)^\top \boldsymbol{d} = 0 \ (i \in J)\}$.

Answer the following questions (i)-(v).

(i) Show that $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^\top M\boldsymbol{d} + \nabla f(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{d}$ for all $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Show that $\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^\top \boldsymbol{d} \geqq 0$ for all $\boldsymbol{d} \in C$.

(iii) Show that $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \in C$ for any feasible solution $\boldsymbol{x}$ of problem (P).

(iv) Suppose that $\boldsymbol{d}^\top M\boldsymbol{d} \geqq 0$ for all $\boldsymbol{d} \in C$. Show that $\boldsymbol{x}^*$ is a global optimal solution to problem (P).

(v) Suppose that $\boldsymbol{x}^*$ is a local optimal solution to problem (P). Show that $\boldsymbol{d}^\top M\boldsymbol{d} \geqq 0$ for all $\boldsymbol{d} \in C^0$.