現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

で表される線形システムを考える．ただし x は状態，u は制御入力である．行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ であるとする．また状態フィードバックゲインを $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$ として $A_K = A+BK$ とおく．部分空間 S を $S = \mathrm{span}\,\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ と定める．ただし span は括弧内のベクトルで張られる部分空間を表す．以下の問いに答えよ．

(i) 部分空間 S は $x \in S$ ならば $Ax \in S$ を満たすことを示せ．

(ii) 部分空間 $S_K = \mathrm{span}\,\{B, A_K B, \ldots, (A_K)^{n-1}B\}$ とすれば $S = S_K$ であることを示せ．

(iii) 部分空間 S から S への線形写像 $\bar{A}_K$ を $\bar{A}_K x = A_K x$, $x \in S$ として定める．特に $K = 0$ のとき，$\bar{A}_0 = \bar{A}$ と書く．$\dim S < n$ のときには $KA^iB = 0$, $i = 0, 1, \ldots, \dim S - 1$ を満たす K に関して，$\bar{A}_K = \bar{A}$ であることを示せ．

(iv) ここでは $n = 3$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -8 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}$$

とする．$\dim S = 2$ であることを示し，$\{B, AB\}$ を S の基底とするときの $\bar{A}_K$ の行列表示を求めよ．その特性方程式を $(s+4)^2$ に設定する状態フィードバックゲイン K をすべて求めよ．

An English translation:

Modern Control Theory

4

A linear dynamical system is described by the state equation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

where x is the state, u is the input, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, and $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Define $A_K = A + BK$ for the state feedback gain $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Define the subspace $S = \text{span}\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$, where span denotes the subspace spanned by the vectors in the brace. Answer the following questions.

(i) Prove that $Ax \in S$ if $x \in S$.

(ii) Define $S_K = \text{span}\{B, A_K B, \ldots, (A_K)^{n-1}B\}$. Show that $S = S_K$.

(iii) Let the linear map $\bar{A}_K : S \to S$ be defined by $\bar{A}_K x = A_K x$ for $x \in S$. Denote $\bar{A}_0 = \bar{A}$ when $K = 0$. Prove that $\bar{A}_K = \bar{A}$ holds for K satisfying $KA^iB = 0$ for $i = 0, 1, \ldots, \dim S - 1$ when $\dim S < n$.

(iv) Let $n = 3$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -8 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}.$$

Show that $\dim S = 2$. Calculate the matrix representation of $\bar{A}_K$ when the basis of S is given by $\{B, AB\}$. Obtain all the feedback gain K for which the characteristic equation of $\bar{A}_K$ is $(s + 4)^2$.