Japanese version shall be the authorized version; the English translation for reference only.

京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成 27 年度 4 月期入学)
Admissions for April 2015
Entrance Examination for Master's Program
Department of Applied Mathematics and Physics
Graduate School of Informatics, Kyoto University
平成 26 年 8 月 6 日(水)13:00 – 15:00
August 6, 2014 13:00 - 15:00

基礎科目
Basic Subjects

選択科目 (Choice of Subjects)
基礎数学 I、アルゴリズム基礎、線形計画、線形制御理論、基礎力学、基礎数学 II
Basic Mathematics I, Data Structures and Algorithms, Linear Programming, Linear Control Theory, Basic Mechanics, Basic Mathematics II

注意 (NOTES)

1. 上記科目から2科目選択すること。
   3科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は1科目につき解答用紙1枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

基礎数学 I

$\boxed{1}$

指数関数 $E(t,x)=e^{2xt-t^2}$ の展開

$$E(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

を用いて関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を定める．以下の問いに答えよ．

(i) 関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ は

$$\frac{df_{n+1}(x)}{dx}=2(n+1)f_n(x)$$

を満たすことを示せ.

(ii) 関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ は

$$f_{n+2}(x)=2xf_{n+1}(x)-2(n+1)f_n(x)$$

を満たすことを示せ.

(iii) 関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ は

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{d}{dx}f_n(x)\right)=-2ne^{-x^2}f_n(x)$$

を満たすことを示せ.

(iv) 関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ について等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f_n(x)^2dx=2^n n!\sqrt{\pi}$$

を示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ を用いてよい.

An English Translation:

Basic Mathematics I

1

Define the functions $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ by using the following expansion of the exponential function $E(t, x) = e^{2xt-t^2}$

$$E(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Answer the following questions.

(i) Show that

$$\frac{df_{n+1}(x)}{dx} = 2(n+1) f_n(x)$$

for any $n = 0, 1, 2, \dots$.

(ii) Show that

$$f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - 2(n+1) f_n(x)$$

for any $n = 0, 1, 2, \dots$.

(iii) Show that

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \frac{d}{dx} f_n(x)\right) = -2n e^{-x^2} f_n(x)$$

for any $n = 0, 1, 2, \dots$.

(iv) Show the equality

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f_n(x)^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

for any $n = 0, 1, 2, \dots$. You may use the equality $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ without proof.

アルゴリズム基礎

$\boxed{2}$

$G = (V, E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る連結な単純無向グラフとし，節点 u の隣接点の集合を $N(u)$ と書く．G の部分グラフ H における節点 u から節点 v への最短路内の枝数を $\mathrm{dist}_H(u, v)$ と書き，H における節点 u から節点 v への最短路の総数を $\sigma_H(u, v)$ と書く．始点 $s \in V$ を選び，T を s からの幅優先探索により得られた G の全域木とする．以下の問いに答えよ．

(i) T を用いて，$d_{\max} = \max\{\mathrm{dist}_G(s, u) \mid u \in V\}$ および $V_i = \{u \in V \mid \mathrm{dist}_G(s, u) = i\}$, $i = 0, 1, \ldots, d_{\max}$ を $O(|V|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(ii) $\{\sigma_G(s, u) \mid u \in V\}$ 内のすべての値を $O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(iii) ある節点 $t \in V - \{s\}$ と節点の部分集合 $A \subseteq V - \{s, t\}$ に対して，G における s から t への最短路のうち，A の節点を 1 個は通過するものの個数を $O(|E|)$ 時間で計算する方法を示せ．

(iv) ある節点 $t \in V - \{s\}$ と節点の部分集合 $A \subseteq V - \{s, t\}$ に対して，G における s から t への最短路のうち，A の節点を少なくとも 2 個通過するものが存在するかどうかの判定を $O(|E|)$ 時間で行う方法を示せ．

An English Translation:

Data Structures and Algorithms

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N(u)$ denote the set of neighbors of a vertex u in G. For a subgraph H of G, let $\mathrm{dist}_H(u, v)$ denote the number of edges in a shortest path from a vertex u to a vertex v in H, and let $\sigma_H(u, v)$ denote the number of shortest paths from a vertex u to a vertex v in H. For a start vertex $s \in V$, let T denote a spanning tree of G obtained by the breadth-first search executed from s. Answer the following questions.

(i) Show how to compute in $O(|V|)$ time $d_{\max} = \max\{\mathrm{dist}_G(s, u) \mid u \in V\}$ and $V_i = \{u \in V \mid \mathrm{dist}_G(s, u) = i\}$, $i = 0, 1, \ldots, d_{\max}$ from T.

(ii) Show how to compute in $O(|E|)$ time all values in $\{\sigma_G(s, u) \mid u \in V\}$.

(iii) A vertex $t \in V - \{s\}$ and a subset $A \subsetneqq V - \{s, t\}$ are given. Show how to compute in $O(|E|)$ time the number of shortest paths from s to t in G which pass through at least one vertex in A.

(iv) A vertex $t \in V - \{s\}$ and a subset $A \subsetneqq V - \{s, t\}$ are given. Show how to test in $O(|E|)$ time whether there is a shortest path from s to t in G which passes through at least two vertices in A.

線形計画

$\boxed{3}$

以下の (i), (ii) に答えよ．

(i) 次の線形計画問題 (P1) とその双対問題 (D1) を考える．

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P1)}: & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{(D1)}: & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c}
\end{array}
$$

ここで，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトル，$\boldsymbol{w}$ は m 次元変数ベクトルであり，$^\top$ は転置記号を表す．問題 (P1) と (D1) は最適解 $\boldsymbol{x}^*$ と $\boldsymbol{w}^*$ をもつとする．さらに $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w}^*$ とする．このとき，$x_i^* > 0$ であれば，$y_i^* = 0$ が成り立つことを示せ．

(ii) 次の線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P2)}: & \text{Maximize} & x_5 \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i \leqq 1 \\
& & \displaystyle\sum_{i=k+1}^{4} x_i \leqq k x_k \ \ (k = 1, 2, 3) \\
& & x_5 \leqq 4x_4
\end{array}
$$

問題 (P2) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とする．問題 (P2) の双対問題の最適解を求めよ．さらに，

$$
\sum_{i=1}^{4} x_i^* = 1
$$

が成り立つことを示せ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Consider the following linear programming problem (P1) and its dual problem (D1):

$$
\begin{array}{llll}
\text{(P1)}: & \text{Minimize} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0},
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{(D1)}: & \text{Maximize} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\
& \text{subject to} & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c},
\end{array}
$$

where $\boldsymbol{A}$ is an $m \times n$ constant matrix, $\boldsymbol{b}$ is an m-dimensional constant vector, $\boldsymbol{c}$ is an n-dimensional constant vector, $\boldsymbol{x}$ is an n-dimensional vector of variables, $\boldsymbol{w}$ is an m-dimensional vector of variables, and $^\top$ denotes transposition. Suppose that problems (P1) and (D1) have optimal solutions $\boldsymbol{x}^*$ and $\boldsymbol{w}^*$, respectively. Let $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{w}^*$. Then show that $y_i^* = 0$ if $x_i^* > 0$.

(ii) Consider the following linear programming problem:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P2)}: & \text{Maximize} & x_5 \\
& \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i \leqq 1 \\
& & \displaystyle\sum_{i=k+1}^{4} x_i \leqq k x_k \quad (k = 1, 2, 3) \\
& & x_5 \leqq 4x_4.
\end{array}
$$

Let $\boldsymbol{x}^*$ be an optimal solution to problem (P2). Obtain an optimal solution to the dual problem of problem (P2). Moreover, show that

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^* = 1.$$

線形制御理論

4

伝達関数

$$P(s) = \frac{b}{s^2 + 2as + a^2 + 1}$$

で表される線形時不変システムを考える．ただし，a, b は実数の定数である．以下の問いに答えよ．

(i) 時刻 t におけるこのシステムの入力と出力をそれぞれ $u(t)$ と $y(t)$ とする．このとき，インパルス応答が時刻 $t = \pi/4$ において最大値をとり，さらに $u(t) = \sin t$ のとき $y(t)$ が振幅 1 の正弦波に漸近するような a, b を求めよ．

図 1 の制御系を考える．ただし，$P(s)$ は上で与えられた伝達関数，a, b は (i) で求めた値であり，K は 0 でない実数の定数とする．また $r(t)$ を入力，$y(t)$ を出力とするシステムの伝達関数を $T(s)$ とする．

(ii) $T(s)$ を求め，このシステムを安定化する K の範囲を求めよ．

(iii) $T(s)$ の極の実部がすべて -0.5 以下となる K が存在するか，また $T(s)$ の極の実部がすべて -1 未満となる K が存在するか，それぞれ理由とともに答えよ．

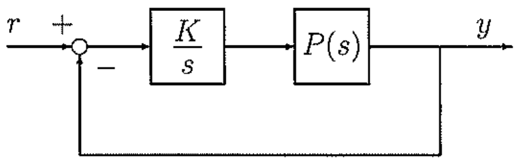

図 1: 制御系

An English Translation:

Linear Control Theory

$\boxed{4}$

Consider the linear continuous-time system described by the transfer function

$$P(s) = \frac{b}{s^2 + 2as + a^2 + 1},$$

where a and b are real constants. Answer the following questions.

(i) Let $u(t)$ and $y(t)$ be the input and output of this system at time t, respectively. Find the value of a and b such that the impulse response has its maximum at the time $t = \pi/4$, and that $y(t)$ converges to a sinusoid with the amplitude 1 when $u(t) = \sin t$.

Figure 1 shows a control system, where $P(s)$ is given as above, a and b are the values obtained in (i), and K is a nonzero real constant. Let $T(s)$ be the transfer function of the system with input $r(t)$ and output $y(t)$.

(ii) Compute $T(s)$ and determine the range of K for which this system is stable.

(iii) Determine whether there exists K such that every pole of $T(s)$ has the real part less than or equal to -0.5. Determine whether there exists K such that every pole of $T(s)$ has the real part less than -1. The derivation process should be shown.

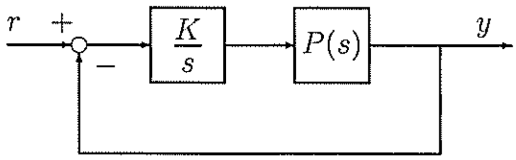

Figure 1: Control system

基礎力学

$\boxed{5}$

質量 m の粒子が力 $\boldsymbol{F} = g(r)\boldsymbol{r}$ を受けて運動している．ここで，$\boldsymbol{r}$ は粒子の原点からの位置ベクトル，$r := |\boldsymbol{r}|$ は $\boldsymbol{r}$ の長さであり，$g(r)$ は $r > 0$ で微分可能な関数である．粒子の位置が原点となることは決してないと仮定する．$\boldsymbol{p} := m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ は粒子の運動量とし，$\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は粒子の原点に関する角運度量とする．ここで，$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ のベクトル積（外積）である．以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{F}$ は保存力であることを示せ．

(ii) $\boldsymbol{L}$ が保存されることを証明せよ．

(iii) 粒子は $\boldsymbol{L}$ に垂直で原点を含む平面内を運動する事を説明せよ．

(iv) $f(r)$ が $r > 0$ で微分可能な関数としたとき，任意の初期条件に対して $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - f(r)\boldsymbol{r}$ が保存される場合の $f(r)$ と $g(r)$ を求めよ．任意のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ に対して $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を用いてよい．ここで，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ のスカラー積（内積）である．

An English Translation:

Basic Mechanics

$\boxed{5}$

A particle of mass m is moving under the action of a force $\boldsymbol{F} = g(r)\boldsymbol{r}$, where $\boldsymbol{r}$ denotes the position vector of the particle from the origin, $r := |\boldsymbol{r}|$ stands for the length of $\boldsymbol{r}$ and $g(r)$ is a differentiable function for $r > 0$. It is assumed that the particle is never at the origin. Let $\boldsymbol{p} := m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ be the momentum of the particle, and $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ be the angular momentum of the particle about the origin, where $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ denotes the vector or cross product of $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}$. Answer the following questions.

(i) Show that $\boldsymbol{F}$ is a conservative force.

(ii) Prove that $\boldsymbol{L}$ is conserved.

(iii) Explain that the particle is moving within the plane which is perpendicular to $\boldsymbol{L}$ and includes the origin.

(iv) Obtain $f(r)$ and $g(r)$ such that $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - f(r)\boldsymbol{r}$, where $f(r)$ is a differentiable function for $r > 0$, is conserved for arbitrary initial conditions, with the use of $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ for arbitrary vectors $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$, where $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ stands for the scalar or dot product of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{c}$.

基礎数学 II

$\boxed{6}$

行列

$$
A_n = \begin{pmatrix}
0 & n & & & & & \\
1 & 0 & n-1 & & & \text{\Large 0} & \\
0 & 2 & 0 & n-2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & n-2 & 0 & 2 & \\
 & & & & n-1 & 0 & 1 \\
 & \text{\Large 0} & & & & n & 0
\end{pmatrix}
$$

の固有値 n および $-n$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$ および $\boldsymbol{v}_2$ とする．また，

$$
\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}
$$

として，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_j = (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \ldots, \delta_{n+1,j})^\top$ を定義する．ここで $^\top$ は，転置を表す．以下の問いに答えよ．

(i) 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ とした時，行列 $\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{n+1})$ によって定義する．このとき，行列 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{T}$ はブロック行列

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}
$$

で表されることを示し，行列 $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{D}$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{0}$ は $(n-1) \times 2$ の零行列を表す．

(iii) (ii) で求めた行列 $\boldsymbol{D}$ および $\boldsymbol{A}_{n-2}$ との間で

$$
\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{A}_{n-2}
$$

を満たす正則な下三角行列 $\boldsymbol{S}$ が存在することを示せ．

(iv) 行列 $\boldsymbol{A}_n$ の固有多項式を計算し，全ての固有値を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ be eigenvectors of the matrix

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & n & & & & & \\ 1 & 0 & n-1 & & & \text{\Large 0} & \\ 0 & 2 & 0 & n-2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & n-2 & 0 & 2 & \\ & & & & n-1 & 0 & 1 \\ & \text{\Large 0} & & & & n & 0 \end{pmatrix}$$

corresponding to the eigenvalues n and $-n$, respectively. Let $\boldsymbol{e}_j$ be the unit vector $\boldsymbol{e}_j = (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \ldots, \delta_{n+1,j})^\top$, where $^\top$ denotes the transposition and

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} .$$

Answer the following questions.

(i) Compute eigenvectors $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ of $\boldsymbol{A}_n$.

(ii) Let us define the matrix $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{n+1})$ for $n \geqq 2$. Show that $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{T}$ takes the block matrix structure

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

where $\boldsymbol{0}$ is the $(n-1) \times 2$ zero matrix, and give the matrices $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{D}$ explicitly.

(iii) Show that there exists a regular lower triangular matrix $\boldsymbol{S}$ such that $\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{A}_{n-2}$ holds, where $\boldsymbol{D}$ is the matrix derived in (ii) .

(iv) Compute the characteristic polynomial of $\boldsymbol{A}_n$, and give all the eigenvalues of $\boldsymbol{A}_n$.

Japanese version shall be the authorized version; the English translation for reference only.

京都大学大学院情報学研究科
修士課程 数理工学専攻入学者選抜試験問題
(平成27年度4月期入学)

Admissions for April 2015
Entrance Examination for Master's Program
Department of Applied Mathematics and Physics
Graduate School of Informatics, Kyoto University

平成26年8月6日(水)15:30 – 17:30
August 6, 2014 15:30 - 17:30

専門科目
Major Subjects

選択科目 (Choice of Subjects)

応用数学、グラフ理論、オペレーションズ・リサーチ、現代制御論、物理統計学、力学系数学
Applied Mathematics, Graph Theory, Operations Research, Modern Control Theory, Physical Statistics, Mathematics for Dynamical Systems

注意 (NOTES)

1. 上記科目から2科目選択すること。
   3科目以上を解答した場合は、答案を無効にすることがある。
2. 日本語または英語で解答すること。
3. 解答は1科目につき解答用紙1枚に記入すること。
   解答を表面に記入しきれない場合は裏面に記入してもよいが、表面において氏名、受験番号、整理番号などと記された部分の裏面にあたる部分を空白にしておくこと。
4. 問題冊子は持ち帰ってよいが、解答用紙は持ち帰ってはならない。

1. Choose 2 subjects out of those 6 stated above.
   Note that in case three or more subjects are chosen and answered, they may be regarded as no answers.
2. Answer the questions in Japanese or English.
3. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used. In that case, state "Over" at the end of the page, however, do not write on the shaded area.
4. Examinees may keep question sheets after the examination, however, they must not keep any answer sheets.

応用数学

1

関数 $f(z)$ は，$R>0$ をある定数とし，領域 $0<|z|<R$ において正則で，$0<r<R$，任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^n}dz=\frac{\langle\alpha\rangle_n}{(|n|!)^2}$$

が成り立つものとする．ただし，$\alpha\in\mathbb{C}$ は定数で，$\langle\alpha\rangle_n$ は

$$\langle\alpha\rangle_n=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n>0)\\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n+1) & (n<0)\\ 1 & (n=0)\end{cases}$$

で定義される．このとき以下の問いに答えよ．

(i) $f(z)$ は $|z|<R$ において正則でないことを示せ．

(ii) $0<|z|<R$ における $f(z)$ のローラン展開を求めよ．

(iii) N をある自然数として $z=0$ が $f(z)$ の N 位の極であるものとする．このとき，α を N で表せ．また，任意の自然数 n に対して，関数

$$g(z)=\begin{cases}z^N f(z) & (0<|z|<R)\\ \lim\limits_{z\to 0} z^N f(z) & (z=0)\end{cases}$$

の n 階微分係数 $\dfrac{d^n g}{dz^n}(0)$ を求めよ．

(iv) $z=0$ が $f(z)$ の真性特異点となるための，α の必要十分条件を求めよ．

An English Translation:

Applied Mathematics

$\boxed{1}$

For a constant $R > 0$, let $f(z)$ be a function which is holomorphic in the region $0 < |z| < R$ and satisfies

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^n} dz = \frac{\langle\alpha\rangle_n}{(|n|!)^2}$$

for $0 < r < R$ and any $n \in \mathbb{Z}$, where $\alpha \in \mathbb{C}$ is a constant and $\langle\alpha\rangle_n$ is defined by

$$\langle\alpha\rangle_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n > 0) \\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n+1) & (n < 0) \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

Answer the following questions.

(i) Show that $f(z)$ is not holomorphic in $|z| < R$.

(ii) Obtain the Laurent series of $f(z)$ in $0 < |z| < R$.

(iii) Assume that $z = 0$ is an Nth-order pole of $f(z)$ for a positive integer N. Express α by using N. Moreover, let

$$g(z) = \begin{cases} z^N f(z) & (0 < |z| < R) \\ \lim\limits_{z\to 0} z^N f(z) & (z = 0). \end{cases}$$

Obtain the nth-order differential coefficient $\dfrac{d^n g}{dz^n}(0)$ for any positive integer n.

(iv) Find a necessary and sufficient condition on α for $z = 0$ to be an essential singularity of $f(z)$.

グラフ理論

$\boxed{2}$

$G=(V,E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純有向グラフとし，$N=[G,c]$ を G の各枝 $e\in E$ に実数値の容量 $c(e)>0$ を与えて得られるネットワークとする．節点の部分集合 $X,Y\subseteqq V$ に対し，X 内の点から Y 内の点へ向かう枝の集合を $E(X,Y)$ と記す．非負実数の集合を $\mathbb{R}_+$ で表す．指定された二点 $s,t\in V$ に対し，流量保存則 $\sum_{e\in E(\{v\},V-\{v\})} f(e)-\sum_{e\in E(V-\{v\},\{v\})} f(e)=0,\ {}^\forall v\in V-\{s,t\}$ および容量制約 $f(e)\leqq c(e),\ {}^\forall e\in E$ を満たす関数 $f:E\to\mathbb{R}_+$ を (s,t) フローと呼び，その流量 $\mathrm{val}(f)$ を

$$\sum_{e\in E(\{s\},V-\{s\})} f(e)-\sum_{e\in E(V-\{s\},\{s\})} f(e)$$

で定める．また，$s\in X,\ t\in V-X$ なる節点の部分集合 $X\subseteqq V$ を (s,t) カットと呼び，その容量 $\mathrm{cap}(X)$ を

$$\sum_{e\in E(X,V-X)} c(e)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の (s,t) フロー f と (s,t) カット X に対し，等式

$$\mathrm{val}(f)=\sum_{e\in E(X,V-X)} f(e)-\sum_{e\in E(V-X,X)} f(e)$$

が成り立つことを証明せよ．

(ii) 与えられた (s,t) フロー f に対して定められる残余ネットワーク $N_f=[G_f=(V,E_f),c_f]$ の作り方を説明せよ．

(iii) ある (s,t) フロー f に対し，残余ネットワーク N_f において s から到達可能な節点の集合を S とする．$t\notin S$ のとき，S は N において容量を最小にする (s,t) カットであることを示せ．

(iv) N において容量を最小にする任意の (s,t) カット X は，(iii) の (s,t) カット S に対して，$X\supseteqq S$ を満たすことを説明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ denote a simple directed graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, c]$ denote a network obtained from G by assigning a real value $c(e) > 0$ to each edge $e \in E$ as its capacity. For vertex subsets $X, Y \subseteqq V$, let $E(X, Y)$ denote the set of edges that leave a vertex in X and enter a vertex in Y. Let $\mathbb{R}_+$ be the set of nonnegative reals. For two designated vertices $s, t \in V$, an (s, t)-flow is defined to be a mapping $f : E \to \mathbb{R}_+$ which satisfies $\sum_{e \in E(\{v\}, V-\{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V-\{v\}, \{v\})} f(e) = 0$, $^\forall v \in V - \{s, t\}$ (flow conservation law) and $f(e) \leqq c(e)$, $^\forall e \in E$ (capacity constraint), and its flow value $\mathrm{val}(f)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(\{s\}, V-\{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V-\{s\}, \{s\})} f(e).$$

An (s, t)-cut is defined to be a vertex subset $X \subseteqq V$ such that $s \in X$ and $t \in V - X$, and its capacity $\mathrm{cap}(X)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(X, V-X)} c(e).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that for any (s, t)-flow f and any (s, t)-cut X

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V-X)} f(e) - \sum_{e \in E(V-X, X)} f(e)$$

holds.

(ii) For a given (s, t)-flow f, show how to construct its residual network $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$.

(iii) For an (s, t)-flow f, let S be the set of all vertices reachable from s in the residual network N_f, and assume that $t \notin S$ holds. Prove that S is an (s, t)-cut in N that minimizes the capacity.

(iv) Prove that any (s, t)-cut X in N that minimizes the capacity satisfies $X \supseteqq S$ for the (s, t)-cut S in (iii).

オペレーションズ・リサーチ

$\boxed{3}$

関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続的微分可能な凸関数とし，$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b\}$ とする．ただし，$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{0}$ でない n 次元ベクトル，b はスカラーであり，$^\top$ はベクトルの転置を表す．

次の凸計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{P}): & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S \end{array}$$

さらにパラメータ $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ を含む次の凸2次計画問題を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{z}): & \text{Minimize} & \nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{y} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})^\top (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{y} \in S \end{array}$$

ここで，決定変数は $\boldsymbol{y}$ である．任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{z})$ は唯一の最適解 $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ をもつ．

以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{z} \in S$ とする．問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{z})$ のカルーシュ・キューン・タッカー (Karush-Kuhn-Tucker) 条件を用いて $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{x} \in S$ かつ $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ は問題 (P) の最適解であることを示せ．

(iii) $\boldsymbol{x} \in S$ かつ $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ であるとき，

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^\top (\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) < 0, \quad \boldsymbol{a}^\top (\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = 0$$

であることを示せ．

(iv) $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ であるとき，$\boldsymbol{x}$ は問題 (P) の最適解でないことを示せ．

An English Translation:

Operations Research

$\boxed{3}$

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable convex function, and let $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b\}$, where $\boldsymbol{a}$ is an n-dimensional nonzero vector, b is a scalar, and the superscript $^\top$ denotes transposition of a vector.

Consider the following convex programming problem:

$$\text{(P)}: \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S. \end{array}$$

Moreover, consider the following convex quadratic programming problem with a vector $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ of parameters:

$$\text{P}(\boldsymbol{z}): \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & \nabla f(\boldsymbol{z})^\top \boldsymbol{y} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y} \in S, \end{array}$$

where $\boldsymbol{y}$ is the vector of decision variables. For each $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, problem $\text{P}(\boldsymbol{z})$ has a unique optimal solution $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$.

Answer the following questions.

(i) Let $\boldsymbol{z} \in S$. Obtain $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})$ by using Karush-Kuhn-Tucker conditions for problem $\text{P}(\boldsymbol{z})$.

(ii) Suppose that $\boldsymbol{x} \in S$ and $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$. Then show that $\boldsymbol{x}$ is an optimal solution to problem (P).

(iii) Suppose that $\boldsymbol{x} \in S$ and $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$. Then show that

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^\top(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) < 0, \quad \boldsymbol{a}^\top(\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}) = 0.$$

(iv) Suppose that $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$. Then show that $\boldsymbol{x}$ is not an optimal solution to problem (P).

現代制御論

4

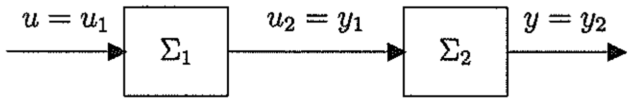

図 1：直列接続

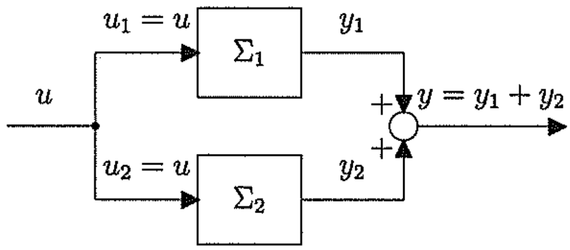

図 2：並列接続

線形動的システム Σ_1, Σ_2 が線形状態方程式

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

で記述されている．ただし $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ はそれぞれのシステムの状態ベクトル，$u_1(t) \in \mathbb{R}$, $u_2(t) \in \mathbb{R}$ はそれぞれのシステムの入力，$y_1(t) \in \mathbb{R}$, $y_2(t) \in \mathbb{R}$ はそれぞれのシステムの出力である．また $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$, $D_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$, $D_2 \in \mathbb{R}$ とする．以下の問い (i)-(v) に答えよ．

(i) 図 1 の直列接続において，状態ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ととるとき，入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とするシステムの状態方程式を求めよ．

(ii) 図 2 の並列接続において，状態ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ととるとき，入力を $u(t)$，出力を $y(t)$ とするシステムの状態方程式を求めよ．

(iii) この小問では，

$$A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = 0, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = 0$$

として，システム Σ_1, Σ_2 を定め，図 1 のように直列接続されたシステムを考える．ただし k は実数である．このシステムの可観測性を調べよ．次に，Σ_1 の初期値を $x_1(0) = 3$ とする．適当な Σ_2 の初期値 $x_2(0)$ を選択し，直列接続されたシステムの入力 $u(t)$ を恒等的に 0 とすると，出力 $y(t)$ も恒等的に 0 になった．このとき k と $x_2(0)$ を求めよ．

(iv) システム Σ_1 が可観測であるためには行列

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n_1 - 1} \end{bmatrix}$$

が正則であることが必要十分であることが知られている．この条件は，A_1 の任意の固有ベクトル $z \neq 0$ が $C_1 z \neq 0$ を満たすことと等価であることを証明せよ．

(v) システム Σ_1, Σ_2 は可観測であるとする．このとき (ii) で与えた状態方程式が可観測であるための必要十分条件は，行列 A_1, A_2 が共通固有値を持たないことを証明せよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

4

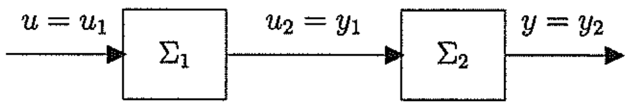

Fig.1: Series connection

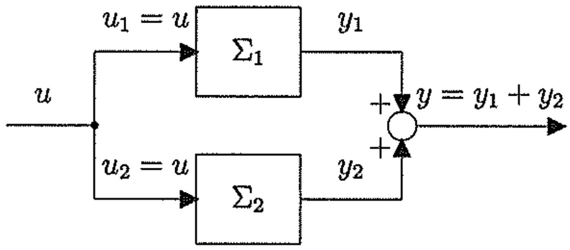

Fig.2: Parallel connection

Linear dynamical systems Σ_1 and Σ_2 are described by the linear state equations:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases},$$

where $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ are the state vectors, $u_1(t) \in \mathbb{R}$, $u_2(t) \in \mathbb{R}$ are the inputs, and $y_1(t) \in \mathbb{R}$, $y_2(t) \in \mathbb{R}$ are the outputs of the systems Σ_1, Σ_2, respectively. Furthermore, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$, $D_1 \in \mathbb{R}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$, and $D_2 \in \mathbb{R}$. Answer the following questions (i)-(v).

(i) Describe the state equation of the system with series connection shown in Fig. 1 when the input is $u(t)$, the output is $y(t)$, and the state vector is chosen as

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Describe the state equation of the system with parallel connection shown in Fig. 2 when the input is $u(t)$, the output is $y(t)$, and the state vector is chosen as

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(iii) In this subproblem, consider the system with series connection shown in Fig. 1 where Σ_1 and Σ_2 are given by

$$A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = 0, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = 0,$$

and k is a real constant. Check the observability of the system. Let the initial condition of Σ_1 be given as $x_1(0) = 3$. Suppose that the output $y(t)$ of the system becomes identically 0 when the input $u(t)$ is identically 0 and the initial condition $x_2(0)$ of Σ_2 is appropriately selected. Determine k and $x_2(0)$.

(iv) It is known that the system Σ_1 is observable if and only if the matrix

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n_1 - 1} \end{bmatrix}$$

is nonsingular. Prove that this condition is equivalent to the statement that any eigenvector $z \neq 0$ of A_1 satisfies $C_1 z \neq 0$.

(v) Assume that the systems Σ_1 and Σ_2 are observable. Prove that the state equation derived in (ii) is observable if and only if the matrices A_1 and A_2 share no common eigenvalues.

物理統計学

$\boxed{5}$

粒子の速度 $v(t)$ は, 次のランジュバン方程式に従うものとする.

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\zeta v(t) + \eta(t)$$

ここで, m と ζ は正の定数であり, それぞれ質量と摩擦係数を表す. $\eta(t)$ は白色雑音で, $\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(s) \rangle = 2\epsilon\delta(t-s)$ を満足する. $\langle A \rangle$ は A の平均を表し, ϵ は正の定数, $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数とする. また $t \to \infty$ でエネルギー等分配則が成り立つ, すなわち, k_B をボルツマン定数, T を温度とする時, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}m\langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ とする. 以下の問いに答えよ.

(i) $v(t) = e^{-\gamma t}\left(\int_0^t e^{\gamma s}(\frac{\eta(s)}{m})ds + v(0)\right)$ を示せ. 但し, $\gamma = \frac{\zeta}{m}$ とおいた.

(ii) ゆらぎ $\langle v^2(t) \rangle$ を求めよ.

(iii) $t \to \infty$ の極限で, 揺動散逸定理

$$\epsilon = k_B T \zeta$$

が成立することを示せ.

(iv) 速度の相関 $\langle v(t)v(s) \rangle$ を求めよ.

(v) 位置変数 $x(t)$ は, $x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds$ を満足する変数とする. その時,

$$D = \lim_{t\to\infty} \frac{\langle \{x(t) - x(0)\}^2 \rangle}{2t}$$

によって定義される拡散係数 D に関して

$$D = \frac{1}{\zeta}k_B T$$

が成立することを示せ.

An English Translation:

Physical Statistics

5

Let the velocity $v(t)$ of a particle obey the following Langevin equation,

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -\zeta v(t) + \eta(t),$$

where m is a positive constant (corresponding to the mass), ζ is a positive constant (corresponding to the friction coefficient), and $\eta(t)$ is the white noise, which satisfies the relations $\langle \eta(t) \rangle = 0$ and $\langle \eta(t)\eta(s) \rangle = 2\epsilon\delta(t-s)$. Here, $\langle A \rangle$ denotes the average of A, ϵ a positive constant and $\delta(t)$ the Dirac delta function. Assume that the energy equipartition law $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}m\langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2}k_BT$ holds, where k_B is the Boltzmann constant and T is a temperature. Answer the following questions.

(i) Show that $v(t) = e^{-\gamma t}\left(\int_0^t e^{\gamma s}(\frac{\eta(s)}{m})ds + v(0)\right)$, where $\gamma = \frac{\zeta}{m}$.

(ii) Compute the fluctuation $\langle v^2(t) \rangle$.

(iii) Show that the fluctuation-dissipation theorem

$$\epsilon = k_BT\zeta$$

holds in the limit $t \to \infty$.

(iv) Compute the velocity correlation $\langle v(t)v(s) \rangle$.

(v) Let $x(t)$ be the position value which satisfies the relation $x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds$. Show that the diffusion coefficient D defined by the following equation

$$D = \lim_{t\to\infty} \frac{\langle \{x(t) - x(0)\}^2 \rangle}{2t}$$

satisfies the relation

$$D = \frac{1}{\zeta}k_BT.$$

力学系数学

$\boxed{6}$

$a(t)$ を半無限区間 $[1,\infty)$ で定義された連続関数として，微分方程式

$$t\frac{d^2x}{dt^2}+(t^2-1)a(t)\frac{dx}{dt}-ta(t)x=0, \qquad t \geqq 1 \tag{1}$$

を考える．$x=\dfrac{t^3}{t^2+1}$ を式 (1) のひとつの解とする．以下の問いに答えよ．

(i) 関数 $a(t)$ を求めよ．

(ii) 式 (1) で $x=\dfrac{t^3}{t^2+1}y$ とおく．y が満たす微分方程式を求めよ．

(iii) (ii) で得られた微分方程式を解き，式 (1) の一般解を求めよ．

(iv) 式 (1) の解 $x(t)$ が半無限区間 $[1,\infty)$ において有界となるための，$t=1$ における初期値 $(x_0,v_0)=\left(x(1),\dfrac{dx}{dt}(1)\right)$ の必要十分条件を求めよ．

An English Translation:

Mathematics for Dynamical Systems

$\boxed{6}$

Let $a(t)$ be a continuous function defined on the semi-infinite interval $[1, \infty)$, and consider the differential equation

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (t^2 - 1)a(t)\frac{dx}{dt} - ta(t)x = 0, \qquad t \geqq 1. \tag{1}$$

Assume that $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}$ is a solution of Eq. (1). Answer the following questions.

(i) Determine the function $a(t)$.

(ii) Let $x = \dfrac{t^3}{t^2+1}y$ in Eq. (1). Derive a differential equation which y has to satisfy.

(iii) Solve the differential equation derived in (ii), and obtain the general solution of Eq. (1).

(iv) Let $x(t)$ be a solution of Eq. (1). Find a necessary and sufficient condition on the initial values $(x_0, v_0) = \left(x(1), \dfrac{dx}{dt}(1)\right)$ at $t = 1$ for $x(t)$ to be bounded on the semi-infinite interval $[1, \infty)$.