基礎数学 II

$\boxed{6}$

行列

$$
\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix}
0 & n & & & & & \\
1 & 0 & n-1 & & & \text{\huge 0} & \\
0 & 2 & 0 & n-2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & n-2 & 0 & 2 & \\
 & & & & n-1 & 0 & 1 \\
 & \text{\huge 0} & & & & n & 0
\end{pmatrix}
$$

の固有値 n および $-n$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$ および $\boldsymbol{v}_2$ とする．また，

$$
\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}
$$

として，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_j = (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \ldots, \delta_{n+1,j})^\top$ を定義する．ここで $^\top$ は，転置を表す．以下の問いに答えよ．

(i) 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ とした時，行列 $\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{n+1})$ によって定義する．このとき，行列 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{T}$ はブロック行列

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ 0 & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}
$$

で表されることを示し，行列 $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{D}$ を求めよ．ここで，0 は $(n-1)\times 2$ の零行列を表す．

(iii) (ii) で求めた行列 $\boldsymbol{D}$ および $\boldsymbol{A}_{n-2}$ との間で

$$
\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{A}_{n-2}
$$

を満たす正則な下三角行列 $\boldsymbol{S}$ が存在することを示せ．

(iv) 行列 $\boldsymbol{A}_n$ の固有多項式を計算し，全ての固有値を求めよ．

An English Translation:

Basic Mathematics II

$\boxed{6}$

Let $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ be eigenvectors of the matrix

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & n & & & & & \\ 1 & 0 & n-1 & & & \text{\huge 0} & \\ 0 & 2 & 0 & n-2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & n-2 & 0 & 2 & \\ & & & & n-1 & 0 & 1 \\ & \text{\huge 0} & & & & n & 0 \end{pmatrix}$$

corresponding to the eigenvalues n and $-n$, respectively. Let $\boldsymbol{e}_j$ be the unit vector $\boldsymbol{e}_j = (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \ldots, \delta_{n+1,j})^\top$, where $^\top$ denotes the transposition and

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} .$$

Answer the following questions.

(i) Compute eigenvectors $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ of $\boldsymbol{A}_n$.

(ii) Let us define the matrix $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{n+1})$ for $n \geqq 2$. Show that $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{T}$ takes the block matrix structure

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

where $\boldsymbol{0}$ is the $(n-1) \times 2$ zero matrix, and give the matrices $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{D}$ explicitly.

(iii) Show that there exists a regular lower triangular matrix $\boldsymbol{S}$ such that $\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{A}_{n-2}$ holds, where $\boldsymbol{D}$ is the matrix derived in (ii) .

(iv) Compute the characteristic polynomial of $\boldsymbol{A}_n$, and give all the eigenvalues of $\boldsymbol{A}_n$.