# 基礎力学

$\boxed{5}$

質量$m$の粒子が力$\boldsymbol{F}=-\dfrac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r}$だけを受けて運動している．ここで，$\boldsymbol{r}$は粒子の原点からの位置ベクトル，$r:=|\boldsymbol{r}|$は$\boldsymbol{r}$の長さであり，$\mu>0$とする．粒子の位置が原点となることは決してないと仮定する．$\boldsymbol{p}:=m\dot{\boldsymbol{r}}$ $(\dot{\boldsymbol{r}}:=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t})$は粒子の運動量とし，$\boldsymbol{L}:=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$は粒子の原点に関する角運動量とする．ここで，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$は$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{p}$のベクトル積(外積)であり，任意のベクトル$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$に対して$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$，及び$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$であり，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$はベクトル$\boldsymbol{a}$とベクトル$\boldsymbol{c}$のスカラー積(内積)とする．また$\boldsymbol{e}:=\dfrac{1}{\mu m^2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$とする．以下の問いに答えよ．

(i) $\boldsymbol{L}$が保存されることを証明せよ．

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\dfrac{(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{r}}{r^3}$が成立することを示せ．

(iii) $\boldsymbol{e}$が保存されることを証明せよ．

(iv) $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{L}=0$を証明せよ．

(v) $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}+r=\dfrac{L^2}{m^2\mu}$を証明せよ．ただし，$L:=|\boldsymbol{L}|$は$\boldsymbol{L}$の長さとする．

An English Translation:

## Basic Mechanics

$\boxed{5}$

A particle of mass $m$ is moving under the action of a force $\boldsymbol{F} = -\frac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r}$, where $\boldsymbol{r}$ denotes the position vector of the particle from the origin, $r := |\boldsymbol{r}|$ stands for the length of $\boldsymbol{r}$ and $\mu > 0$. It is assumed that the particle is never at the origin. Let $\boldsymbol{p} := m\dot{\boldsymbol{r}}$ be the momentum of the particle where $\dot{\boldsymbol{r}} := \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ and $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ be the angular momentum of the particle about the origin, where $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ denotes the vector or cross product of $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}$. Here $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$ and $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ hold for arbitrary vectors $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$, where $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ stands for the scalar or dot product of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{c}$. Let $\boldsymbol{e}$ be defined as $\boldsymbol{e} := \frac{1}{\mu m^2}(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}) - \frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Answer the following questions.

(i) Prove that $\boldsymbol{L}$ is conserved.

(ii) Prove that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}}{r^3}$.

(iii) Prove that $\boldsymbol{e}$ is conserved.

(iv) Prove that $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{L} = 0$.

(v) Prove that $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} + r = \frac{L^2}{m^2\mu}$, where $L := |\boldsymbol{L}|$ stands for the length of $\boldsymbol{L}$.